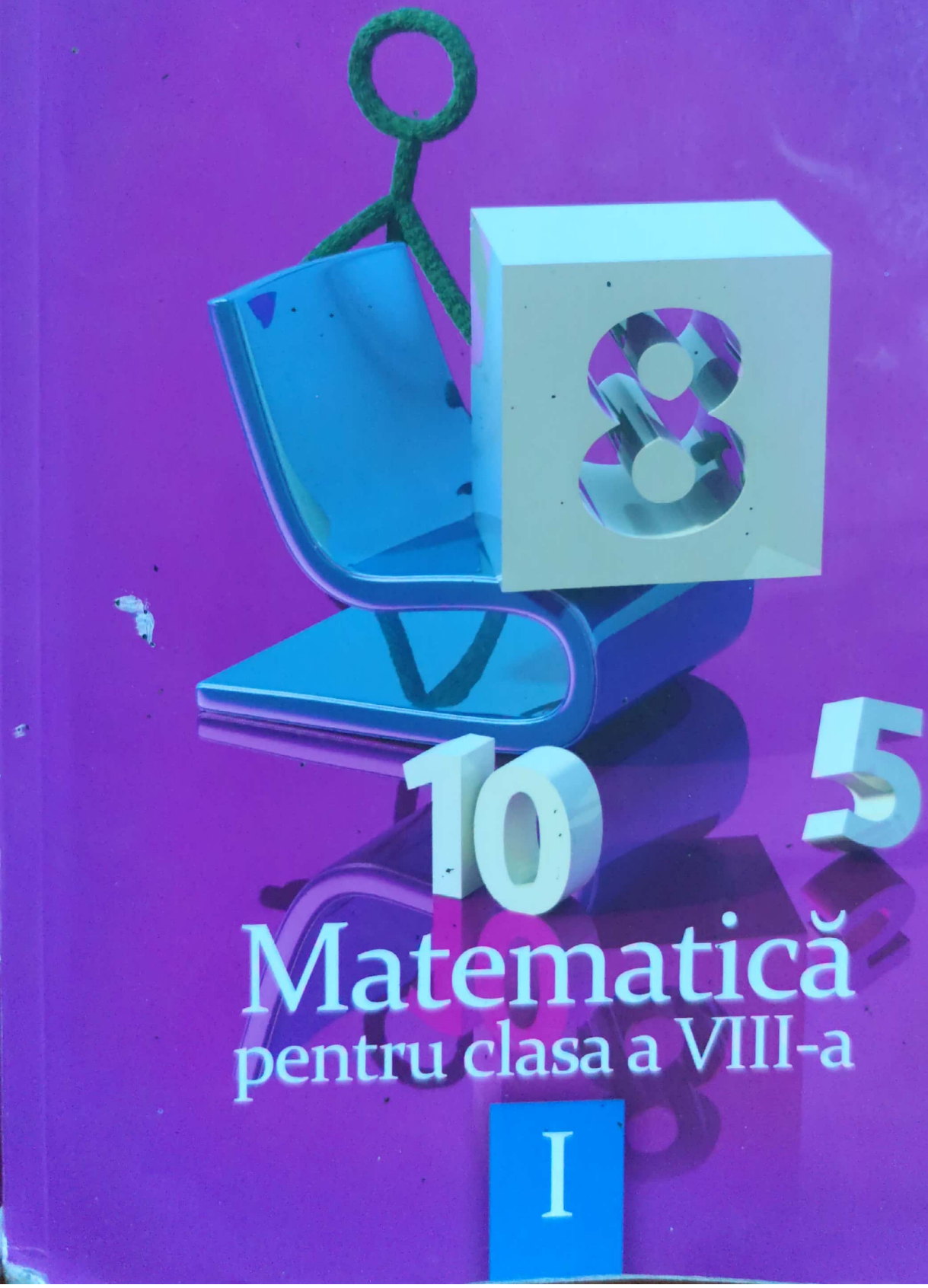
CLUBUL MATEMATICIENILOR

Mircea FIANU • Marius PERIANU
Dumitru SĂVULESCU



10 5 Matematică pentru clasa a VIII-a

I

Scanned with OKEN Scanner

Mircea FIANU • Marius PERIANU • Dumitru SĂVULESCU

Matematică

clasa a VIII-a

I

MA.

CLUBUL MATEMATICIENILOR

Scanned with OKEN Scanner

Clubul matematicienilor este un proiect dezvoltat de Grupul Editorial Art.

Copyright © 2012

Toate drepturile asupra acestei lucrări aparţin editurii.
Reproducerea integrală sau parţială a conţinutului lucrării
este posibilă numai cu acordul prealabil scris al editurii.

Referenţi ştiinţifici:
prof. drd. Livia Harabagiu
prof. gr. I Mircea Popescu
prof. gr. I Liviu Adrian Stroie

Tehnoredactare:
Cornel Drăghia

Coperta:
Alexandru Daş

Tipărit la C.N.I. „CORESI" S.A.

Descrierea CIP este disponibilă la Biblioteca Naţională a României

ISBN 978-973-124-764-9

Pentru **comenzi** vă puteţi adresa:

Departamentului Difuzare
C.P. 22, O.P. 84, sector 61, Bucureşti

telefon
021.224.17.65
0721.213.576
0744.300.870
Se acordă importante **reduceri.**

Scanned with OKEN Scanner

Cuprins

ALGEBRĂ

Cap. 1 – Numere reale

1.1. Mulțimi de numere reale $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ 7

1.2. Reprezentarea pe axă a numerelor reale. Compararea și ordonarea numerelor reale 13

1.3. Modulul unui număr real 20

1.4. Intervale în $\mathbb{R}$. Definiție, reprezentare pe axă 23

Teste de evaluare 29

1.5. Operații cu numere reale 33

1.6. Raționalizarea numitorilor 43

Teste de evaluare 47

1.7. Calcul cu numere reprezentate prin litere: adunarea, scăderea, înmulțirea, împărțirea, ridicarea la putere cu exponent număr întreg 51

1.7.1. Înmulțirea și împărțirea. Puteri cu exponent întreg. Ordinea efectuării operațiilor 51

1.7.2. Înmulțirea, împărțirea, ridicarea la putere cu exponent întreg 54

1.8. Formule de calcul prescurtat 57

1.9. Descompunerea în factori 62

1.9.1. Metoda factorului comun 62

1.9.2. Utilizarea formulelor de calcul prescurtat 64

1.9.3. Descompunerea în factori folosind metode combinate 66

Teste de evaluare 70

1.10. Rapoarte de numere reale reprezentate prin litere. Amplificarea. Simplificarea 73

1.11. Operații cu rapoarte de numere reale reprezentate prin litere 78

1.11.1. Adunarea și scăderea 78

1.11.2. Înmulțirea, împărțirea, ridicarea la putere. Expresii cu toate operațiile 83

Teste de evaluare 93

1.12. Probleme cu caracter aplicativ 97

1.13. Probleme pentru performanță școlară și olimpiade 100

Scanned with OKEN Scanner

GEOMETRIE

Cap. 2 – Corpuri geometrice

2.1. Puncte, drepte, plane 107
2.2. Piramida 112
2.3. Prisma 116
Teste de evaluare 120
2.4. Poziţiile relative a două drepte în spaţiu 123
2.5. Unghiul a două drepte în spaţiu. Drepte perpendiculare 126
Teste de evaluare 129
2.6. Poziţiile relative ale unei drepte faţă de un plan. Dreaptă paralelă cu un plan 133
2.7. Dreaptă perpendiculară pe un plan. Distanţa de la un punct la un plan. Înălţimea piramidei 137
Teste de evaluare 141
2.8. Poziţiile relative a două şi trei plane. Plane paralele. Teoreme de paralelism 145
2.9. Secţiuni paralele cu baza în corpurile studiate. Trunchiul de piramidă 149
Teste de evaluare 153
2.10. Probleme cu caracter aplicativ 157
2.11. Probleme pentru performanţă şcolară şi olimpiade 160

Cap. 3 – Proiecţii ortogonale

3.1. Proiecţii de puncte, segmente şi drepte pe un plan 165
3.2. Unghiul unei drepte cu un plan. Lungimea proiecţiei unui segment 169
3.3. Teorema celor trei perpendiculare (T 3) 173
Teste de evaluare 177
3.4. Unghi diedru. Plane perpendiculare 181
3.5. Calculul unor distanţe şi măsuri de unghiuri pe feţele sau în interiorul corpurilor studiate 186
Teste de evaluare 191
3.6. Probleme cu caracter aplicativ 195
3.7. Probleme pentru performanţă şcolară şi olimpiade 197

Cap. 4 – Variante de subiecte pentru teză 201

Soluţii 209

Scanned with OKEN Scanner

ALGEBRĂ

CAPITOLUL 1

Numere reale

1.1. Mulţimi de numere reale: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$

1.2. Reprezentarea pe axă a numerelor reale. Compararea numerelor reale

1.3. Modulul unui număr real

1.4. Intervale de numere reale

Teste de evaluare

1.5. Operaţii cu numere reale

1.6. Raţionalizarea numitorilor

Teste de evaluare

1.7. Calcule cu numere reale reprezentate prin litere

1.7.1. Adunarea şi scăderea

1.7.2. Înmulţirea, împărţirea şi ridicarea la putere

1.8. Formule de calcul prescurtat

1.9. Descompunerea în factori

Teste de evaluare

1.10. Rapoarte de numere reale reprezentate prin litere. Amplificarea. Simplificarea

1.11. Operaţii cu rapoarte de numere reale reprezentate prin litere

1.11.1. Adunarea şi scăderea

1.11.2. Înmulţirea şi împărţirea

1.11.3. Ordinea efectuării operaţiilor

Teste de evaluare

1.12. Probleme cu caracter aplicativ

1.13. Probleme pentru performanţă şcolară şi olimpiade

Scanned with OKEN Scanner

CAPITOLUL 1

Numere reale

1.1. Mulțimi de numere reale: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$

Mulțimea numerelor naturale

Notații. $\mathbb{N} = \{0,1,2,...,n,...\}$ este *mulțimea numerelor naturale;*

$\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\} = \{1,2,...,n,...\}$ este *mulțimea numerelor naturale nenule.*

Observație. Mulțimea numerelor naturale $\mathbb{N}$ este *stabilă* în raport cu operațiile de *adunare* și *înmulțire*, adică suma a două numere naturale este un număr natural, iar produsul a două numere naturale este tot un număr natural.

Mulțimea numerelor întregi

Notații. $\mathbb{Z} = \{...,-2,-1,0,+1,+2,...\}$ este *mulțimea numerelor întregi;*

$\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ este *mulțimea numerelor întregi nenule.*

Observația 1. $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$ și $\mathbb{Z} = \{\pm n \mid n \in \mathbb{N}\} = \{-n \mid n \in \mathbb{N}^*\} \cup \{0\} \cup \mathbb{N}^*$.

Observația 2. Mulțimea numerelor întregi este *stabilă* în raport cu operațiile de *adunare, scădere* și *înmulțire*, adică suma, diferența și produsul a două numere întregi sunt numere întregi.

Mulțimea numerelor raționale

Notații. $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \,\middle|\, a \in \mathbb{Z},\ b \in \mathbb{Z}^* \right\}$ este *mulțimea numerelor raționale;*

$\mathbb{Q}^* = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ este *mulțimea numerelor raționale nenule.*

Observația 1. Mulțimea numerelor raționale este *stabilă* în raport cu operațiile de *adunare, scădere, înmulțire* și *împărțire*, adică suma, diferența, produsul și câtul a două numere raționale (dintre care împărțitorul este nenul) sunt numere raționale.

Observația 2. Pentru orice număr rațional nenul q există o *unică fracție ireductibilă* $\frac{a}{b}$, cu $a \in \mathbb{Z}$ și $b \in \mathbb{N}^*$, astfel încât $q = \frac{a}{b}$.

Observația 3. Un număr rațional poate fi reprezentat prin *fracții ordinare echivalente* sau printr-o *fracție zecimală finită* sau *periodică.*

Exemple. a. $\frac{12}{5} = \frac{24}{10} = 2,4$, fracție zecimală *finită;*

b. $\frac{250}{6} = \frac{125}{3} = 41,666... = 41,(6)$, fracție zecimală *periodică simplă;*

c. $\frac{1505}{6} = 250,8333... = 250,8(3)$, fracție zecimală *periodică mixtă.*

Scanned with OKEN Scanner

Mulțimea numerelor reale

Notații. $\mathbb{R}$ este *mulțimea numerelor reale*;

$\mathbb{R}^*$ este *mulțimea numerelor reale nenule*;

$\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ este *mulțimea numerelor iraționale*.

Observația 1. $\mathbb{N}\subset\mathbb{Z}\subset\mathbb{Q}\subset\mathbb{R}$.

Observația 2. Orice *număr irațional* este reprezentat de o *fracție zecimală infinită și neperiodică*.

Observația 3. Reciproc, dacă un *număr real* este reprezentat de o *fracție zecimală infinită și neperiodică*, atunci *numărul este irațional*.

---

1. Dintre propozițiile de mai jos, menționați-le pe cele adevărate:

a) $5\in\mathbb{N}$; *b)* $\sqrt{23}\in\mathbb{R}$; *c)* $8,(3)\in\mathbb{N}$;

d) $-3\notin\mathbb{N}$; *e)* $\sqrt{7}\notin\mathbb{Q}$; *f)* $13\in\mathbb{Z}$;

g) $\frac{7}{3}\in\mathbb{Z}$; *h)* $\frac{5}{11}\in\mathbb{Q}$; *i)* $2,25\in\mathbb{N}^*$.

2. Se consideră numerele $-7;\ 5\frac{1}{4};\ -5;\ -3,25;\ \sqrt{3};\ \frac{1}{6};\ 0;\ -\frac{2}{5};\ +4;\ 3,1(4)$.

Dintre aceste numere:

a) numerele naturale sunt...; *b)* numerele nenule sunt...;

c) numerele întregi sunt...; *d)* numerele reale sunt...;

e) numerele raționale sunt...; *f)* numerele iraționale sunt....

3. Fie $A=\left\{-17;\ 4\frac{1}{2};\ 0,(5);\ \sqrt{4};\ -2;\ \sqrt{13};\ 0;\ 279;\ 5\frac{3}{13};\ \frac{23}{14}\right\}$. Determinați:

a) $A\cap\mathbb{N}$; *b)* $A\cap(\mathbb{Z}\setminus\mathbb{N})$; *c)* $A\cap\mathbb{Q}$;

d) $A\cap\mathbb{Z}$; *e)* $A\cap(\mathbb{Q}\setminus\mathbb{Z})$; *f)* $A\cap\mathbb{Q}^*$;

g) $A\cap(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})$; *h)* $A\cap\mathbb{R}_+$; *i)* $A\cap\mathbb{R}$.

4. Dintre următoarele fracții, indicați fracțiile echivalente cu $\frac{3}{5}$.

a) $\frac{6}{10}$; *b)* $\frac{30}{25}$; *c)* $\frac{9}{25}$; *d)* $\frac{30}{50}$; *e)* $\frac{12}{20}$; *f)* $\frac{51}{85}$;

5. Reprezentați sub formă de fracție ordinară fiecare dintre numerele :

a) $4,7$; *b)* $19,(5)$; *c)* $0,5(3)$;

d) $5,25$; *e)* $32,(41)$; *f)* $1,21(05)$.

6. Reprezentați următoarele numere raționale sub formă de fracție ireductibilă:

a) $5,3$; *b)* $0,701$; *c)* $125,49$;

d) $6,3(5)$; *e)* $2,(4)$; *f)* $13,7(14)$.

Scanned with OKEN Scanner

7. Transformați următoarele fracții ordinare în fracții zecimale, amplificându-le, eventual, convenabil:

a) $\frac{7}{10}$; *b)* $\frac{13}{25}$; *c)* $\frac{5}{9}$;

d) $\frac{29}{5}$; *e)* $\frac{11}{20}$; *f)* $\frac{13}{6}$.

8. Transformați următoarele fracții ordinare în fracții zecimale, simplificându-le, eventual, mai întâi:

a) $\frac{34}{10}$; *b)* $\frac{16}{8}$; *c)* $\frac{412}{90}$;

d) $\frac{345}{100}$; *e)* $\frac{21}{3}$; *f)* $\frac{1224}{396}$;

g) $\frac{344}{1\,000}$; *h)* $\frac{2}{25}$; *i)* $\frac{23}{180}$.

9. Reprezentați următoarele numere raționale sub formă de fracție zecimală:

a) $\frac{9}{5}$; *b)* $\frac{5}{11}$; *c)* $\frac{707}{77}$;

d) $\frac{21}{6}$; *e)* $\frac{202}{303}$; *f)* $\frac{51}{37}$.

10. Determinați numerele naturale nenule a și b pentru care fracția ireductibilă $\frac{a}{b}$ este echivalentă cu fracția:

a) $\frac{34}{65}$; *b)* $\frac{39}{65}$; *c)* $\frac{13}{1001}$;

d) $\frac{85}{15}$; *e)* $\frac{55}{1133}$; *f)* $\frac{5151}{8585}$.

11. Reprezentați numerele raționale de mai jos sub forma $\frac{a}{b}$, unde $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{N}^*$.

a) $\frac{-4}{-5}$; *b)* $-\frac{-37}{-11}$; *c)* $-3\frac{5}{13}$;

d) $0,9(36)$; *e)* $3,(7)$; *f)* $-2,1(6)$.

12. Dați câte trei exemple de numere naturale n pentru care fracția $\frac{6}{n}$ este:

a) subunitară; *b)* ireductibilă; *c)* reductibilă;
d) zecimală finită; *e)* periodică simplă; *f)* periodică mixtă.

13. Determinați fracția ireductibilă echivalentă cu:

a) $\frac{474747}{252525}$; *b)* $\frac{123123}{234234}$; *c)* $\frac{49704970}{24572457}$.

Scanned with OKEN Scanner

**

14. Stabiliți valoarea de adevăr a fiecăreia dintre următoarele propoziții, enunțând câte un contraexemplu în cazul propozițiilor false.

a) „Orice număr natural este număr întreg."

b) „Orice număr real este număr rațional".

c) „Dacă un număr nu este rațional, atunci numărul nu este întreg."

d) „Orice număr întreg este număr natural."

e) „Orice număr rațional este număr real."

f) „Un număr este natural numai dacă numărul nu este întreg."

15. Scrieți numărul 12 ca:

a) suma a trei numere naturale;

b) suma a două numere întregi din care unul negativ;

c) diferența a două numere întregi;

d) produsul a două numere raționale;

e) produsul a două numere iraționale;

f) suma a două numere iraționale.

16. Reprezentați în baza 10 următoarele numere raționale:

a) 739; *b)* $0{,}145$; *c)* $15{,}34$;

d) $25{,}203$; *e)* $210{,}08$; *f)* $2{,}3(4)$.

Rezolvare. *a)* $739 = 7\cdot 10^2 + 3\cdot 10^1 + 9\cdot 10^0$

c) $15{,}34 = 1\cdot 10^1 + 5\cdot 10^0 + 3\cdot 10^{-1} + 4\cdot 10^{-2}$ sau $15{,}34 = 1\cdot 10^1 + 5\cdot 10^0 + \frac{3}{10^1} + \frac{4}{10^2}$.

17. Determinați, în fiecare din situațiile următoare, numerele întregi n pentru care relațiile următoare reprezintă propoziții adevărate:

a) $\frac{14}{n-1} \in \mathbb{N}$; *b)* $\frac{18}{2n-1} \in \mathbb{Z}\setminus\mathbb{N}$; *c)* $\frac{25}{4n+1} \in \mathbb{Z}$;

d) $\frac{2n}{2n+1} \in \mathbb{Z}_+$; *e)* $\frac{3n+5}{3n-1} \in \mathbb{Z}$; *f)* $\frac{4n+11}{2n+3} \in \mathbb{N}$.

18. Scrieți câte două numere raționale cuprinse între $\frac{1}{7}$ și $\frac{1}{6}$ sub formă de:

a) fracții ordinare; *b)* fracții zecimale periodice; *c)* fracții zecimale finite;

19. Determinați numerele naturale nenule x și y pentru care $\overline{xxxx}_{(3)} = \overline{yy}_{(9)}$.

20. Numerele $123{,}123123$; $0{,}(142857)$ și $7{,}2(51)$ se scriu sub formă de fracție zecimală.

a) Scrieți a 10-a cifră de după virgulă a fiecărui număr;

b) Determinați a 100-a cifră de după virgulă a fiecărui număr.

21. Aflați cel mai mic număr natural nenul a pentru care fracțiile $\frac{a}{12}$, $\frac{a}{5}$ și $\frac{a}{36}$ reprezintă simultan numere naturale.

Scanned with OKEN Scanner

22. *a)* Determinaţi numerele naturale n pentru care fracţia $\frac{n-3}{3n-2}$ este reductibilă.

b) Determinaţi suma celor mai mici 2011 numerele naturale nenule n pentru care fracţia $\frac{n-3}{3n-2}$ este reductibilă.

23. Aflaţi numerele naturale n pentru care fracţiile următoare sunt reductibile:

a) $\frac{2n+3}{10n+8}$; *b)* $\frac{3n+2}{5n+8}$; *c)* $\frac{n+1}{n^2-3n+1}$.

24. Fie numărul $a=\frac{10^k-(-1)^{2k}}{9}+\frac{3n^2+4n+(-1)^{2k+1}\cdot n}{6}$, $n\in\mathbb{N}$ şi $k\in\mathbb{N}$.

Arătaţi că $a\in\mathbb{N}$.

25. Demonstraţi că numerele următoare sunt iraţionale:

a) $\sqrt{3}$; *b)* $\sqrt{5}$; *c)* $\sqrt{p}$, unde p este un număr natural prim.

Rezolvare *a)* Presupunem că $\sqrt{3}$ este număr raţional adică există fracţia ireductibilă $\frac{a}{b}$ astfel încât $\sqrt{3}=\frac{a}{b}$, echivalent cu $3=\frac{a^2}{b^2}$, sau $3b^2=a^2$. Deducem că $3\mid a$, adică $a=3a_1$, $a_1\in\mathbb{N}^*$. Înseamnă că $3b^2=(3a_1)^2$, echivalent cu $3b^2=9a_1^2$, sau $b^2=3a_1^2$. Deducem că $3\mid b$, adică $b=3b_1$, $b_1\in\mathbb{N}^*$. Deci $\frac{a}{b}=\frac{3a_1}{3b_1}$ este fracţie reductibilă, contrar presupunerii făcute. Rezultă că presupunerea este falsă, deci $\sqrt{3}$ este număr iraţional.

26. Stabiliţi dacă numărul $\sqrt{A}$ este raţional în următoarele cazuri:

a) $A=3^2+4^2+5^2$; *c)* $A=1+3+5+7+...+199$;

b) $A=5^{2006}+7^{2007}$; *d)* $A=199+2\cdot(1+2+3+...+199)$.

27. Scrieţi elementele mulţimilor:

a) $A=\left\{x\in\mathbb{N}\,\middle|\,\frac{3x+11}{x+1}\in\mathbb{N}\right\}$; *c)* $C=\left\{x\in\mathbb{Z}\,\middle|\,75\le 3x^2\le 300\right\}$;

b) $B=\left\{x\in\mathbb{Z}\,\middle|\,\frac{5x+13}{2x+1}\in\mathbb{Z}\right\}$; *d)* $D=\left\{x\in\mathbb{N}\,\middle|\,14<x^2+4\le 40\right\}$.

28. Determinaţi cifrele a, b, c astfel încât să aibă loc relaţiile:

a) $\overline{4a1}\,\vdots\,3$; *b)* $\overline{71a5}\,\vdots\,9$; *c)* $\overline{62ab}\,\vdots\,15$;

d) $\overline{2a3b}\,\vdots\,36$; *e)* $\overline{aa67b}\,\vdots\,45$; *f)* $\overline{99abc}\,\vdots\,198$.

29. Se consideră numărul $a=\frac{27}{45}$ şi mulţimea $M=\{a,2a,3a,...,45a\}$.

a) Determinaţi numărul de elemente din mulţimea $M\cap\mathbb{N}$;

b) Calculaţi probabilitatea ca, alegând la întâmplare un element din M, acesta să fie număr natural.

Scanned with OKEN Scanner

***

30. Stabiliți valoarea de adevăr a următoarelor propoziții, demonstrând propozițiile adevărate și oferind câte un contraexemplu în cazul propozițiilor false.

a) Produsul oricăror două numere iraționale este un număr irațional.

b) Suma dintre un număr rațional și un număr irațional este număr irațional.

c) Produsul dintre un număr irațional și un număr rațional nenul este număr irațional.

d) Există două numere iraționale a căror diferență este număr rațional.

e) Pătratul oricărui număr irațional este număr rațional.

f) Orice număr irațional ridicat la puterea zero este număr natural.

Rezolvare. *a)* Propoziție falsă. Contraexemplu: $5-\sqrt{3},5+\sqrt{3}\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ și $(5-\sqrt{3})\cdot(5+\sqrt{3})=5^2-\sqrt{3^2}=25-3=22$ care nu este irațional.

31. *a)* Arătați că un număr este divizibil cu 8 dacă și numai dacă numărul format de ultimele trei cifre ale sale este divizibil cu 8.

b) Arătați că $\overline{abc}$ este divizibil cu 8 dacă și numai dacă $4a+2b+c\vdots 8$.

32. Se consideră numărul $a=\overline{0,122333...\underbrace{nn...n}_{n\text{ ori}}...}$.

a) Demonstrați că a este număr irațional.

b) Determinați a 100-a cifră de după virgulă a numărului a.

33. Determinați cifra x (din baza zece) astfel încât:

a) $\sqrt{\frac{\overline{24x}}{60}}\in\mathbb{N}$; *b)* $\sqrt{\frac{\overline{17x}}{11}}\in\mathbb{N}$; *c)* $\sqrt{\frac{\overline{2x9x}}{18}}\in\mathbb{N}$;

d) $\sqrt{\frac{\overline{28x}}{18}}\in\mathbb{Q}$; *e)* $\sqrt{\frac{\overline{7x}}{12}}\in\mathbb{Q}$; *f)* $\sqrt{\frac{\overline{18x}}{4}}\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$.

34. Demonstrați că următoarele numere sunt iraționale:

a) $2+\sqrt{3}$; *b)* $\frac{2}{\sqrt{3}}+\sqrt{3}$; *c)* $\sqrt{3}+\sqrt{2}$;

d) $\sqrt{3}+\sqrt{2}$; *e)* $\sqrt{7}-\sqrt{5}$; *f)* $2\sqrt{5}+5\sqrt{2}$.

35. Demonstrați că, dacă n este un număr natural, atunci următoarele numere nu sunt raționale:

a) $\sqrt{1\cdot2\cdot3\cdot...\cdot9+8}$; *b)* $\sqrt{5n+2}$; *c)* $\sqrt{4n+2}$.

Probleme de șapte stele

36. Fie $a\in\mathbb{Q}$. Dacă $7a\in\mathbb{Z}$ și $3a\in\mathbb{Z}$, demonstrați că $a\in\mathbb{Z}$.

37. Demonstrați că, dacă $n\in\mathbb{N}$ și $\sqrt{n}\in\mathbb{Q}$, atunci $\sqrt{n}\in\mathbb{N}$.

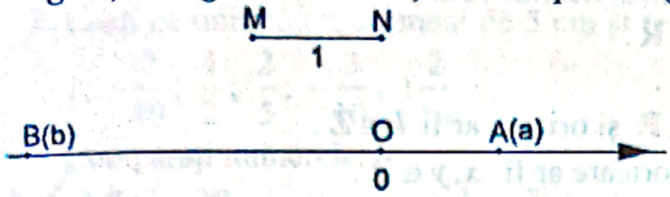
38. Arătați că numărul $x=0,101001000100001...$ este irațional.

39. Fie numerele $a,b,c,d\in\mathbb{Q}$ și $x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ astfel încât $a+bx=c+dx$. Arătați că $a=c$ și $b=d$.

Scanned with OKEN Scanner

1.2. Reprezentarea pe axă a numerelor reale. Compararea şi ordonarea numerelor reale.

Axa numerelor reale este o dreaptă pe care s-a fixat un punct O numit *origine*, un *segment unitate* şi un *sens pozitiv* (consemnat printr-o săgeată).



Oricărui punct A de pe axa numerelor îi corespunde un număr real a, numit *abscisa punctului A* şi notăm $A(a)$.

Reciproc, oricărui număr real b îi corespunde pe axa numerelor punctul $B(b)$, numit *imaginea* numărului real b. Punctului O îi corespunde numărul real 0. Numerele *reale pozitive* se reprezintă pe semidreapta care indică sensul pozitiv.

Observaţie. Abscisa unui punct A de pe axa numerelor se mai notează şi x_A. Dacă $A(x_A)$ şi $B(x_B)$ sunt două puncte pe axa numerelor, lungimea segmentului $[AB]$ este $AB = |x_B - x_A|$.

Compararea şi ordonarea numerelor reale.

Spunem că numărul real a este *mai mare* decât numărul real b, dacă există un număr real pozitiv c astfel încât $a = b + c$. Notăm $a > b$.

Echivalent, scriem $b < a$ şi citim b este mai mic decât a. Dacă $a > b$ sau $a = b$, spunem că numărul real a este *mai mare sau egal* cu numărul real b şi notăm $a \geq b$, sau, echivalent, spunem că b este *mai mic sau egal* cu a şi notăm $b \leq a$.

Observaţii.

1. Oricare două numere reale *pot fi comparate* în sensul că, dacă a şi b sunt numere reale, atunci $a > b$ sau $a = b$ sau $b > a$.
2. Orice număr *pozitiv* este *mai mare* decât zero şi orice număr *negativ* este *mai mic* decât zero.
3. Orice număr negativ este mai mic decât orice număr pozitiv.

Proprietăţile relaţiei de ordine

1. *Reflexivitatea*: $a \geq a$, oricare ar fi numărul real a.
2. *Antisimetria*: Oricare ar fi numerele a şi b, dacă $a \geq b$ şi $b \geq a$, atunci $a = b$.
3. *Tranzitivitatea*: Oricare ar fi numerele a, b şi c, dacă $a \geq b$ şi $b \geq c$, atunci $a \geq c$.
4. Relaţia $\geq$ este *compatibilă* cu operaţiile de adunare şi înmulţire a numerelor reale, adică, oricare ar fi numerele a şi b, inegalitatea $a \geq b$ este echivalentă cu:
   a) $a + c \geq b + c, \forall c \in \mathbb{R}$; *b)* $a \cdot c \geq b \cdot c, \forall c > 0$; *c)* $a \cdot c \leq b \cdot c, \forall c < 0$.
5. Dacă $a \geq b$ şi $c \geq d$, atunci $a + c \geq b + d$.
   Dacă $a \geq b \geq 0$ şi $c \geq d \geq 0$, atunci $a \cdot c \geq b \cdot d \geq 0$.

Partea întreagă şi partea fracţionară a unui număr real.

Partea întreagă a numărului real x, notată $[x]$, este cel mai mare număr întreg mai mic sau egal cu x.

Numărul $\{x\} = x - [x]$ se numeşte *partea fracţionară* a numărului real x.

Scanned with OKEN Scanner

Exemple.

1. $[1,53] = 1$, deoarece $1 \le 1,53 < 2$ şi $\{1,53\} = 1,53 - [1,53] = 1,53 - 1 = 0,53$.
2. $[-1,53] = -2$, fiindcă $-2 \le 1,53 < -1$ şi $\{-1,53\} = -1,53 - [-1,53] = -1,53 - (-2) = 0,47$.

Proprietăţi ale părţii întregi a unui număr real

1. $[x] \le x < [x] + 1$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$.
2. $[x] = x$ dacă şi numai dacă $x \in \mathbb{Z}$.
3. $[x + k] = [x] + k$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$ şi oricare ar fi $k \in \mathbb{Z}$.
4. $[x] + [y] \le [x + y] \le [x] + [y] + 1$, oricare ar fi $x, y \in \mathbb{R}$.

Proprietăţi ale părţii fracţionare a unui număr real

1. $0 \le \{x\} < 1$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$.
2. $\{x\} = x$ dacă şi numai dacă $0 \le x < 1$.
3. $\{x\} = 0$ dacă şi numai dacă $x \in \mathbb{Z}$.
4. $\{x + k\} = \{x\}$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$ şi oricare ar fi $k \in \mathbb{Z}$.

Aproximări şi rotunjiri. Fie x un număr real, r un număr raţional şi e un număr real dat. Spunem că numărul raţional r îl *aproximează* pe x (este *aproximare* a lui x) cu *eroare* cel mult egală cu e dacă $|x - r| \le e$.

Aproximarea se face prin *lipsă* dacă $r < x$ sau prin *adaos* dacă $r \ge x$.

Observaţie. Fie x un număr real pozitiv şi $e = 10^{-p}$, $p \in \mathbb{Z}$. Atunci:

1. O aproximare a lui x prin lipsă cu eroare de cel mult 10^{-p} este
$$x_l = 10^{-p} \cdot [10^p \cdot x].$$
2. O aproximare a lui x prin adaos cu eroare de cel mult 10^{-p} este
$$x_a = 10^{-p}\left([10^p \cdot x] + 1\right).$$
3. Rotunjirea lui x cu eroare de cel mult 10^{-p} este $r = \begin{cases} x_l, \text{ dacă } x - x_l < x_a - x \\ x_a, \text{ dacă } x - x_l \ge x_a - x \end{cases}$.

Exemple:

1. Pentru $p = 1$ se obţin aproximări ale lui x, prin lipsă sau prin adaos, cu eroare cel mult egală cu 10^{-1} (altfel spus, aproximările cu eroare de cel mult o zecime). Fie $x = 24,53$ avem

– o aproximare a lui x prin lipsă: $x_l = 10^{-1} \cdot [10 \cdot 24,53] = 24,5$;

– o aproximare a lui x prin adaos: $x_a = 10^{-1}\left([10^1 \cdot 24,53] + 1\right) = 24,6$.

Cum $x - x_l = 24,53 - 24,5 = 0,03$ şi $x_a - x = 24,6 - 24,53 = 0,07$, iar $0,03 < 0,07$ rezultă că numărul 24,5 îl rotunjeşte pe 24,53 cu eroare de cel mult 10^{-1} (o zecime).

2. Pentru $p = -2$, se obţin aproximări ale lui x cu eroare cel mult egală cu 10^2 (altfel spus aproximările la ordinul sutelor). Pentru $x = 321,4$ avem:

– o aproximare a lui x prin lipsă: $x_l = 10^2 \cdot [10^{-2} \cdot 321,4] = 10^2 \cdot 3 = 300$;

– o aproximare a lui x prin adaos: $x_a = 10^2 \cdot \left([10^{-2} \cdot 321,4] + 1\right) = 10^2 \cdot 4 = 400$.

Scanned with OKEN Scanner

*

1. Reprezentați pe axă numerele -3; 5; -1; 2; 0; 4, luând ca unitate un segment de 1 cm.

2. Luați ca unitate un segment de 5 cm și reprezentați pe axă numerele: -1; $0{,}8$; 1; $-\frac{7}{10}$; $\frac{1}{2}$; $\frac{2}{5}$; $-\frac{3}{10}$; $1\frac{2}{10}$.

3. Comparați numerele:

a) 7 și -20; *b)* -7 și -6; *c)* -2 și -12;
d) 1,2 și 1,(2); *e)* 2,022 și 2,202; *f)* $-0{,}8(98)$ și $-0{,}(89)$;
g) $-0{,}012$ și $-0{,}0021$; *h)* $-1{,}023$ și $-1{,}203$; *i)* 9,6(969) și 9,(69).

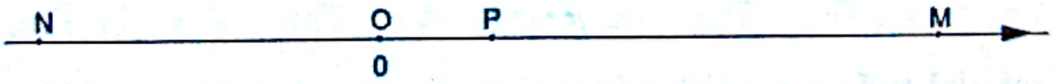
4. Comparați numerele:

a) $\frac{1}{5}$ și $\frac{3}{2}$; *b)* $-\frac{4}{23}$ și $-\frac{1}{23}$; *c)* $\frac{5}{7}$ și $\frac{11}{7}$;
d) $-\frac{11}{12}$ și $-\frac{12}{11}$; *e)* $\frac{5}{6}$ și $\frac{6}{7}$; *f)* $\frac{33}{176}$ și $\frac{15}{85}$;
g) $-3\frac{1}{2}$ și $-3\frac{4}{8}$; *h)* $\frac{8}{5}$ cu $\frac{6}{4}$; *i)* $-\frac{5}{4}$ cu $-\frac{5}{3}$.

5. *a)* Scrieți în ordine crescătoare numerele: 14; -3; 0; $\frac{8}{2}$; $-15{,}4$; $7\frac{1}{2}$; $-\sqrt{5}$.

b) Ordonați descrescător numerele: 18; $-\sqrt{2}$; $5\sqrt{3}$; -1; $9{,}(7)$; $-5{,}4$; $-0{,}9$.

6. În figura de mai jos, sunt reprezentate pe axa numerelor punctele $O(0)$, M, N și P astfel încât $OM = 5$, $OP = 1$, $ON = 3$.



a) Determinați abscisa fiecăruia dintre punctele M, N și P;
b) Calculați lungimile segmentelor $[MN]$ și $[MP]$;
c) Verificați dacă punctul P este mijlocul segmentului $[MN]$.

7. Aflați partea întreagă și partea fracționară a următoarelor numere reale:

a) 8,7; *b)* $-7{,}2$; *c)* 2,(5); *d)* $-4{,}(3)$;
e) $\sqrt{13}$; *f)* $-\sqrt{5}$; *g)* $-4+\sqrt{5}$; *h)* $-3+\sqrt{9}$;
i) $\frac{2}{7}$; *j)* $-\frac{2}{7}$; *k)* $4\frac{1}{3}$; *l)* $-3\frac{1}{3}$.

8. Dați exemple de trei numere iraționale care să aibă partea întreagă egală cu:

a) 0; *b)* 4; *c)* -3; *d)* $x = -1{,}(5)$;

9. Calculați $[x] + 2\{x\}$ unde:

a) $x = 12$; *b)* $x = 5{,}4$; *c)* $x = -4{,}3$; *d)* -1;

Scanned with OKEN Scanner

e) $x=\sqrt{3}$; *f)* $x=\frac{17}{5}$; *g)* $x=-\frac{23}{10}$; *h)* $x=3,(3)$.

10. Fie numărul $a=12,5481632$.

a) Aproximați numărul a cu o eroare de cel mult o sutime prin lipsă.

b) Aproximați numărul a cu o eroare de cel mult o miime prin adaos.

c) Rotunjiți numărul cu o eroare egală cu cel mult: *i)* 10^{-2}; *ii)* 10^{-5}.

d) Aproximați numărul $b=1000\cdot a$ cu eroare de cel mult 10^2 prin lipsă.

11. Calculați $a=\sqrt{279,3543}$ cu patru zecimale exacte și apoi:

a) rotunjiți la zecimi numărul a;

b) scrieți numărul a cu aproximație de o miime prin lipsă;

c) scrieți numărul a cu aproximație de o zecime prin adaos;

d) scrieți partea întreagă a numărului a.

12. Pentru numărul 27,853761, scrieți o aproximare:

a) cu eroare de 10^{-2} prin adaos;

b) cu eroare de 10^{-5} prin adaos;

c) cu eroare de 10^{-4} prin lipsă;

d) cu eroare de 10 prin lipsă.

13. Pentru fiecare $a,b\in\mathbb{R}$, considerăm numerele

$\max(a,b)=\begin{cases}a, \text{ dacă } a\geq b\\ b, \text{ dacă } a<b\end{cases}$ și $\min(a,b)=\begin{cases}a, \text{ dacă } a\leq b\\ b, \text{ dacă } a\geq b\end{cases}$, numite *maximum* și respectiv *minimum* dintre a și b. Determinați:

a) $\max(-11;-7)$; *b)* $\min\left(\frac{2}{5};\frac{2}{10}\right)$; *c)* $\min(-18;-17,4)$;

d) $\max\left(12,5;5\frac{3}{4}\right)$; *e)* $\max\left(5^2;(-2)^5\right)$; *f)* $\max\left(-\sqrt{100};-\sqrt{81}\right)$.

**

14. Reprezentați pe axă numerele $\frac{3}{4}$; -2; 2; -1; $0,5$; $1,75$; $-0,25$; $-3,5$, luând ca unitate un segment convenabil.

15. Reprezentați pe axa numerelor elementele fiecăreia dintre mulțimile:

a) $A=\{n\in\mathbb{N}^*\mid n \text{ divide } 12\}$;

b) $B=\{n\in\mathbb{Z}\mid -3\leq n<2\}$;

c) $C=\left\{n\in\mathbb{N}\mid \frac{15}{n+1}\in\mathbb{N}\right\}$;

d) $D=\left\{n\in\mathbb{Z}\mid \frac{5}{2n+1}\in\mathbb{Z}\right\}$.

16. Încadrați fiecare din numerele de mai jos între două numere întregi consecutive:

a) $1,2$; *b)* $1,(2)$; *c)* $-4,3$; *d)* $-4,(5)$;

e) $3\sqrt{2}$; *f)* $-2\sqrt{5}$; *g)* $\sqrt{2}+\sqrt{50}$; *h)* $\sqrt{3}-\sqrt{27}$;

i) $4+\sqrt{3}$; *j)* $\frac{47}{21}$; *k)* $3\frac{1}{3}$; *l)* $-\frac{75}{28}$.

MARIUS PERIANU • Dumitru SĂVULESCU

Scanned with OKEN Scanner

17. Comparați numerele:

a) $2\sqrt{3}$ și $3\sqrt{2}$; *b)* $\sqrt{19}$ și $2\sqrt{5}$; *c)* $6\sqrt{3}$ și 11;

d) $-3\sqrt{3}$ și $-4\sqrt{2}$; *e)* $-\sqrt{289}$ și $-3\sqrt{25}$; *f)* $-4\sqrt{15}$ și $-9\sqrt{3}$.

18. Comparați numerele:

a) $\sqrt{3}+\sqrt{75}$ și 10; *b)* $2\sqrt{7}+\sqrt{75}$ și $\sqrt{28}+\sqrt{44}$; *c)* $3-4\sqrt{5}$ și -6;

d) $\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{4}$ și 4; *e)* $8+5\sqrt{2}$ și $8+2\sqrt{5}$; *f)* $5-6\sqrt{2}$ și $-\sqrt{8}$.

19. *a)* Ordonați descrescător numerele: $-\sqrt{7}$; $1,14$; $-\sqrt{3}$; $\sqrt{2}$; $2+\sqrt{2}$; 0; $\sqrt{11}$.

b) Scrieți în ordine crescătoare numerele: 5; $\frac{13}{6}$; $\frac{7}{14}$; $-\frac{5}{15}$; $-1,(34)$, $\sqrt{5}$.

20. Calculați:

a) $\max(18;-7)-\min(-0,(3);-0,34)$; *b)* $3\cdot\min(4;-1)+\max(-7;-2)$;

c) $\max(5;2\sqrt{6})+\min(18;14+\sqrt{23})$; *d)* $2\max\left(\sqrt{8};2,1\right)-3\max\left(\sqrt{2};1,75\right)$.

21. Determinați mulțimile:

a) $\left\{x\in\mathbb{Z}\,\middle|\, 0<\frac{3x+10}{8}<\frac{11}{5}\right\}$; *b)* $\left\{x\in\mathbb{N}\,\middle|\, 1\le\frac{5x+12}{12x+5}\le 2\right\}$;

c) $\left\{x\in\mathbb{N}\,\middle|\, \frac{x+1}{12}<\frac{6}{13}<\frac{2x+1}{14}\right\}$; *d)* $\left\{x\in\mathbb{Z}\,\middle|\, \frac{2x+1}{5}<\frac{3x+1}{9}<\frac{4x+1}{13}\right\}$;

e) $\left\{x\in\mathbb{N}\setminus\{3\}\,\middle|\, \frac{x-3}{6}<\frac{3}{x-3}<\frac{x-3}{3}\right\}$; *f)* $\left\{x\in\mathbb{Z}\,\middle|\, \frac{1}{x+2}>\frac{3}{2x+4}>\frac{5}{4x+8}\right\}$.

22. Ordonați crescător următoarele secvențe de numere reale:

a) $5, 2\sqrt{7}, 3\sqrt{3}, 4\sqrt{2}, \sqrt{30}, 2\sqrt{5}$; *b)* $12, 5\sqrt{6}, 9\sqrt{2}, 4\sqrt{10}, 2\sqrt{30}, 7\sqrt{3}$;

c) $31, 24\sqrt{2}, 15\sqrt{5}, 12\sqrt{30}, 12\sqrt{7}$; *d)* $5\sqrt{10}, 7\sqrt{5}, 9\sqrt{3}, 4\sqrt{15}, 10\sqrt{2}, 15$;

e) $-3\sqrt{14}, -5\sqrt{5}, -3\sqrt{13}, -4\sqrt{7}, -11$; *f)* $-10, -6\sqrt{3}, -3\sqrt{11}, -5\sqrt{5}, -7\sqrt{2}$.

23. *a)* Dați exemplu de două numere reale a și b astfel încât $a>b$ și $\{a\}<\{b\}$.

b) Dați exemplu de două numere reale a și b astfel încât $\{a\}=\{b\}=0,7$ și $a\cdot b<0$. Calculați $\{a\cdot b\}$ în acest caz.

24. Fie a și b două numere reale, $a<b$. Demonstrați că:

a) $a<\frac{2a+b}{3}<\frac{a+2b}{3}<b$; *b)* $a<\frac{3a+b}{4}<\frac{a+b}{2}<\frac{a+3b}{4}<b$.

25. Fie a și b două numere reale pozitive, $a<b$. Arătați că:

a) $a^2<ab<b^2$; *b)* $a^3<a^2b<ab^2<b^3$; *c)* $a^4<a^3b<a^2b^2<ab^3<b^4$.

26. Demonstrați că, pentru orice numere reale a, b, avem:

a) $a^2+ab+b^2\ge 0$; *b)* $a^2-ab+b^2\ge 0$.

Scanned with OKEN Scanner

***

27. Demonstrați că:

a) $\frac{1}{2}<\frac{1}{10}+\frac{1}{11}+\frac{1}{12}+...+\frac{1}{19}<1$; *b)* $\frac{1}{6}<\frac{1}{50}+\frac{1}{51}+\frac{1}{52}+....+\frac{1}{59}<\frac{1}{5}$.

c) $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+...+\frac{1}{99\cdot 100}<1$;

d) $\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+...+\frac{1}{99\cdot 101}<\frac{1}{2}$;

e) $0,2<\frac{1}{4\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 6}+...+\frac{1}{49\cdot 50}<0,25$; *f)* $\frac{2}{5}<\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+...+\frac{1}{9^2}<\frac{8}{9}$.

28. Reprezentați pe câte o axă a numerelor elementele fiecăreia dintre mulțimile:

a) $A=\{x\in\mathbb{N}\mid 3\le x<7\}$; *b)* $B=\left\{x\in\mathbb{Z}\,\middle|\,\frac{3x+10}{x+1}\in\mathbb{Z}\right\}$;

c) $C=\left\{\frac{x}{y}\,\middle|\,x,y\in\mathbb{N}\text{ și }1\le x,y<4\right\}$; *d)* $D=\left\{x\in\mathbb{Z}\,\middle|\,\frac{4x+17}{2x+1}\in\mathbb{Z}\right\}$.

29. Stabiliți care dintre următoarele numere este mai mic:

a) $\sqrt{197}$ și $2+\sqrt{3}$; *b)* $\sqrt{11}+\sqrt{5}$ și $\sqrt{32}$; *c)* $\sqrt{11}+\sqrt{13}$ și $\sqrt{19}+\sqrt{5}$;

d) $\sqrt{7}+\sqrt{5}$ și $3+\sqrt{3}$; *e)* $\sqrt{5}-\sqrt{2}$ și $2-\sqrt{3}$; *f)* $\sqrt{15}-\sqrt{13}$ și $\sqrt{14}-3$.

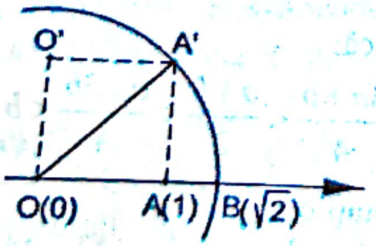
Rezolvare. *d)* Numerele date sunt pozitive deci putem compara pătratele lor. Avem: $(\sqrt{7}+\sqrt{5})^2=12+2\sqrt{35}$ și $(3+\sqrt{3})^2=12+6\sqrt{3}$. Cum $(2\sqrt{35})^2=140>108=(6\sqrt{3})^2$, rezultă $2\sqrt{35}>6\sqrt{3}$, deci $3+\sqrt{3}<\sqrt{7}+\sqrt{5}$.

30. Comparați numerele:

a) $\sqrt{3}+\sqrt{15}$ și $\sqrt{19+8\sqrt{3}}$; *b)* $2+\sqrt{3}$ și $\sqrt{7+4\sqrt{3}}$;

c) $3-\sqrt{5}$ și $\sqrt{14-6\sqrt{5}}$; *d)* $4-3\sqrt{3}$ și $-\sqrt{7-4\sqrt{3}}$.

31. Reprezentați pe aceeași axă numerele: *a)* $\sqrt{2}$; *b)* $1+\sqrt{2}$; *c)* $\sqrt{3}$; *d)* $\sqrt{5}$.



Rezolvare. *a)* Fie $O(0)$ originea axei și punctul $A(1)$. Construim pătratul $OAA'O'$. Din calcul, rezultă $OA'=\sqrt{2}$. Cu ajutorul compasului, determinăm pe axă punctul $B(\sqrt{2})$, luând $OB=OA'$.

32. Se consideră numerele reale x și y mai mari sau egale cu 0. Arătați că:

a) Dacă $x+y=0$, atunci $x=y=0$; *b)* Dacă $x\cdot y\le 0$, atunci $x=0$ sau $y=0$.

33. *a)* Fie $x\in\mathbb{R}$, $x\ge 4$. Demonstrați egalitatea: $x-4\sqrt{x-4}=(\sqrt{x-4}-2)^2$.

Scanned with OKEN Scanner

Marius PERIANU • Dumitru SAVULESCU

b) Arătați că, dacă $x+y\le 4\sqrt{x-4}+6\sqrt{y-9}$, atunci $x=8$ și $y=18$.

34. *a)* Fie numerele reale x, y, z astfel încât $x^2+y^2+z^2=xy+yz+zx$. Arătați că:

$$(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2=0.$$

b) Se consideră triunghiul ABC de laturi $BC=a$, $CA=b$, $AB=c$. Arătați că:

$$\left[\frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}\right]=\begin{cases}0, \text{ dacă } \Delta ABC \text{ nu este echilateral}\\ 1, \text{ dacă } \Delta ABC \text{ este echilateral}\end{cases}$$

35. Demonstrați că, pentru orice numere reale pozitive a, b, c, d, are loc inegalitatea: $\sqrt{(a+c)(b+d)}\ge\sqrt{ab}+\sqrt{cd}$. Când are loc egalitatea?

36. *a)* Fie $x,y>0$. Arătați că $\frac{xy}{x+y}\le\frac{x+y}{4}$.

b) Arătați că $\frac{ab}{a+b}+\frac{bc}{b+c}+\frac{ca}{c+a}\le\frac{a+b+c}{2}$, pentru orice $a,b,c>0$.

Probleme de șapte stele

37. Determinați numerele reale $a,b,c\in\mathbb{R}$ pentru care are loc inegalitatea:

$$\sqrt{a^2-2a+2}+\sqrt{4b^2-12b+25}+\sqrt{2c^2-12c+27}\le 8.$$

38. Comparați numerele a și b dacă:

a) $a=\sqrt{n}+\sqrt{n+1}$ și $b=\sqrt{n-1}+\sqrt{n+2}$; $n\ge 1$

b) $a=\sqrt{2n-5}+\sqrt{3n+1}$ și $b=2\sqrt{n}+\sqrt{n+2}$, $n\ge 3$.

39. Determinați partea întreagă a fiecăruia dintre numerele A și B, unde:

$$A=2+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\ldots+\frac{1}{2^{10}};\ \text{și}\ B=a+\frac{1}{a}+\frac{1}{a^2}+\frac{1}{a^3}+\ldots+\frac{1}{a^{10}},\ \text{unde}\ a\in\mathbb{N}^*.$$

40. Calculați partea fracționară a numerelor A și B, unde:

$$A=1+\frac{1}{1\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 7}+\frac{1}{7\cdot 10}+\ldots+\frac{1}{97\cdot 100};\quad B=\frac{1}{1\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 9}+\frac{1}{9\cdot 13}+\ldots+\frac{1}{97\cdot 101}.$$

41. *a)* Determinați numerele:

$$a=\left[\frac{1}{2}\right]+\left[\frac{2}{2}\right]+\left[\frac{3}{2}\right]+\ldots.+\left[\frac{39}{2}\right]+\left[\frac{40}{2}\right];\ b=\left[\frac{1}{2}\right]+\left[\frac{2}{2}\right]+\left[\frac{3}{2}\right]+\ldots.+\left[\frac{98}{2}\right]+\left[\frac{99}{2}\right].$$

b) Fie $n\ge 1$ un număr natural. Arătați că $S=\left[\frac{1}{2}\right]+\left[\frac{2}{2}\right]+\left[\frac{3}{2}\right]+\left[\frac{4}{2}\right]+\ldots.+\left[\frac{n}{2}\right]$ este pătrat perfect dacă și numai dacă n este număr par.

42. Fie x un număr real. Arătați că $[x]+\left[x+\frac{1}{2}\right]=[2x]$. (*Identitatea lui Hermite*).

43. Se consideră numărul real pozitiv x, numărul întreg p și numerele $x_1=10^{-p}[10^p\cdot x]$, respectiv $x_a=10^{-p}\left([10^p\cdot x]+1\right)$. Arătați că:

a) $x_1\le x<x_a$; *b)* dacă $x-x_1=x_a-x$, atunci $x=10^{-p}\left[10^p\cdot x\right]+5\cdot 10^{-(p+1)}$.

Scanned with OKEN Scanner

1.3. Modulul unui număr real

Fie x este un număr real. Numim *modulul* (sau *valoarea absolută*) a numărului real x, numărul real notat $|x|$, definit prin:

$$|x| \overset{\text{def}}{=} \begin{cases} x, & \text{pentru } x>0 \\ 0, & \text{pentru } x=0 \\ -x, & \text{pentru } x<0 \end{cases}.$$

Proprietățile modulului unui număr real

1. $|x|\geq 0$, oricare ar fi $x\in\mathbb{R}$.
2. $|x|=0$ dacă și numai dacă $x=0$.
3. $|x|=|-x|$, oricare ar fi $x\in\mathbb{R}$.
4. $|x\cdot y|=|x|\cdot|y|$, oricare ar fi $x,y\in\mathbb{R}$.
5. $|x+y|\leq|x|+|y|$, oricare ar fi $x,y\in\mathbb{R}$.
   $|x-y|\leq|x|+|y|$, oricare ar fi $x,y\in\mathbb{R}$.
6. $\big||x|-|y|\big|\leq|x-y|$, oricare ar fi $x,y\in\mathbb{R}$.
7. $\sqrt{x^2}=|x|$, oricare ar fi $x\in\mathbb{R}$.
8. Dacă $x\in\mathbb{R}$ și $a>0$, atunci $|x|<a$ dacă și numai dacă $-a<x<a$.
9. Dacă $x\in\mathbb{R}$ și $a>0$, atunci $|x|>a$ dacă și numai dacă $x<-a$ sau $x>a$.

*

1. Calculați:

a) $|-3|$; *b)* $|+7|$; *c)* $|-1|+|-2|+|-3|$;

d) $|-1,(21)|$; *e)* $|7,35|$; *f)* $|-3|+|+7|$;

g) $\left|-\frac{3}{5}\right|$; *h)* $\left|11\frac{3}{8}\right|$; *i)* $\left|-\frac{13}{47}\right|$.

2. Stabiliți valoarea de adevăr a fiecăreia dintre propozițiile:

a) $|-5|=-5$; *b)* $|-23|<23$; *c)* $-|-6,51|=-6,51$;

d) $|-11|=|+11|$; *e)* $|1-\sqrt{5}|=1-\sqrt{5}$; *f)* $-|-12+9|=3$.

3. Reprezentați pe câte o axă a numerelor elementele fiecăreia dintre mulțimile:

a) $A=\{x\in\mathbb{Z}\,|\,3\leq|x|<6\}$; *b)* $B=\{x\in\mathbb{R}\,|\,|x|=2\}$;

c) $C=\{x\in\mathbb{R}\,|\,|x|\leq 2\}$; *d)* $D=\{x\in\mathbb{R}\,|\,|x|=-x\}$.

4. Determinați numerele reale x știind că:

a) $|x|=8$; *b)* $|x-1|=0$; *c)* $|3x-11|=0$;

d) $|x-7|=9$; *e)* $|3x-10|=2$; *f)* $|x+5|=11$;

g) $|3x|=-3$; *h)* $|4x+5|=3$; *i)* $|2x-6|=4$.

5. Stabiliți valoarea de adevăr a propozițiilor următoare:

a) $|-7+5|=|-7|+|5|$; *b)* $|-7\cdot 5|=|-7|\cdot|5|$;

Scanned with OKEN Scanner

c) $|-7-5|\le|-7|-|5|$; d) $|\pi-3|\le|\pi+1|-|\pi+2|$;

e) $|-\sqrt{3}+2\sqrt{2}|\ne|\sqrt{3}-2\sqrt{2}|$; f) $\left|-2+\frac{\sqrt{5}}{2}\right|\le|-2|+\left|\frac{\sqrt{5}}{2}\right|$;

**

6. Determinați numerele reale x care verifică egalitățile:

a) $|x|=73$; b) $|x-5|=0$; c) $|2x+1|=11$;

d) $|x-1|=3$; e) $|x-3|=7$; f) $2|x-3|-13=25$.

7. Determinați numerele reale x și y știind că:

a) $|x-7|+|y+5|=0$; b) $|x-y|+|3x+2y-10|=0$;

c) $|3x+5|+(5y-3)^2=0$; d) $4\cdot|x-3|+|x+5y+1|=0$;

e) $-4\cdot|x+3|-2\cdot|y-10|=0$; f) $3\cdot|y|+|5x+y-13|=0$.

8. Determinați numerele $x\in\mathbb{R}$ astfel încât:

a) $\sqrt{(x+5)^2}=11$; b) $\sqrt{(2x-3)^2}=5$; c) $\sqrt{(1-x)^2}=3$;

d) $\sqrt{(0,4x+0,2)^2}=1$; e) $\sqrt{(-x-2)^2}=7$; f) $\sqrt{5+(x-2)^2}=3$.

9. Calculați:

a) $|x+5|+|x-2|+|2x+1|$, pentru $x<-6$;

b) $|x+3|+|2x-5|-|x-1||$, pentru $x\ge 3$;

c) $|x+1|+|x-1|-|x-2|$, pentru $1\le x\le 2$.

10. Determinați valorile expresiilor următoare, în condițiile indicate alăturat:

a) $|x+3|-\sqrt{(-3-x)^2}$, pentru $x\in\mathbb{R}$;

b) $\sqrt{(3-x)^2}+\sqrt{(x-7)^2}$, pentru $x\in[3;7]$;

c) $4\cdot\sqrt{x^2+y}-\sqrt{y^2+8x+9}$, pentru $x\in(-1;0)$ și $y=4(x+1)$;

d) $|x^2-x|+\sqrt{(x-1-x^2)^2}$, pentru $x\in(0;1)$.

11. Determinați numerele reale x care verifică egalitățile:

a) $|x-3|=5$; b) $||x-3|-3|=5$; c) $|||x-3|-3|-3|=5$.

12. Stabiliți valoarea de adevăr a propozițiilor:

a) $\sqrt{3-2\sqrt{2}}=1-\sqrt{2}$; b) $|3,14-\pi|+\sqrt{(\pi-3,16)^2}=0,02$;

c) $\sqrt{(3\sqrt{2}-4)^2}=4-3\sqrt{2}$; d) $\sqrt{(3\sqrt{2}-5)^2}+\sqrt{(3\sqrt{2}+5)^2}\in\mathbb{Q}$.

13. Determinați numerele $x\in\mathbb{R}$ astfel încât:

a) $|x-7|\cdot||x+1|-3|\le 0$; b) $|2x+18|\cdot||x-5|-|2x+3||\le 0$;

c) $|-x-3|\cdot|5-|1-x||\le 0$; d) $||x|-|x-1||\cdot|x+1|\le 0$.

Scanned with OKEN Scanner

***

14. Folosind faptul că $|a|+|b|\geq|a\pm b|$, oricare ar fi $a,b\in\mathbb{R}$, demonstrați că pentru orice $x\in\mathbb{R}$ au loc inegalitățile:

a) $|x+5|+|3-x|\geq 8$; *b)* $|2x+1|+2\cdot|1-x|\geq 3$;

c) $|4x-11|+2\cdot|2x-5|\geq 21$; *d)* $3\cdot|4x+7|+4\cdot|7-3x|\geq 49$;

e) $2\cdot|2x+3|+|x-5|+|3x-19|\geq 30$.

15. Arătați că valorile expresiilor următoare nu depind de valorile reale ale lui x:

a) $3-5x^2+|x^2+1|+\left|4\sqrt{(x^2+2)^2}+7\right|$; *b)* $\left|\sqrt{3}+2x^2\right|-\left|\sqrt{x^4}\right|-\left|\sqrt{7}+x^2\right|-11$;

c) $\left|(x-5)^2+1\right|+5(2x-3)-\sqrt{(x^2+9)^2}$; *d)* $\left|-2-3x^2\right|-\sqrt{\left(1+\left|x^2\right|\right)^2}-\sqrt{4x^4}$.

16. Pentru fiecare $a,b\in\mathbb{R}$, considerăm numerele

$$\max(a,b)=\begin{cases}a, \text{ dacă } a\geq b\\ b, \text{ dacă } a<b\end{cases} \text{ și } \min(a,b)=\begin{cases}a, \text{ dacă } a\leq b\\ b, \text{ dacă } a\geq b\end{cases}.$$

Arătați că: $\max(a,b)=\dfrac{a+b+|a-b|}{2}$ și $\min(a,b)=\dfrac{a+b-|a-b|}{2}$.

17. Fie $x,y\in\mathbb{R}$ astfel încât $-1\leq x\leq 2$ și $2y-x=1$. Aflați valoarea expresiei

$$E=\sqrt{(x+1)^2}+|x-2|+\sqrt{3(2y-3)^2+(x-2)^2}+\sqrt{x^2+12y^2+2x+1}.$$

18. Fie $-1\leq x\leq 1$ și $-3\leq y\leq 4$. Arătați că următoarea expresie este constantă:

$$E=\sqrt{(x+y-5)^2}+\sqrt{(2x+y+5)^2}-\sqrt{(x-y-4)^2}+\sqrt{(2x-y-5)^2}.$$

Probleme de șapte stele

19. Fie $x,y\in\mathbb{R}$ astfel încât $|x|<2$ și $|y|<2$. Arătați că $\left|\dfrac{x+y}{4+xy}\right|<\dfrac{1}{2}$.

20. Demonstrați că dacă $|x-y|<a$, pentru orice $a>0$, atunci $x=y$.

21. *a)* Fie $x,y\in\mathbb{R}$ astfel încât $|x+y|=|x-y|$. Calculați $x\cdot y$.

b) Fie $x,y,z\in\mathbb{R}$ astfel încât $|x+y+z|=|-x+y+z|=|x-y+z|=|x+y-z|$. Arătați că $(x^2+y^2)\cdot(y^2+z^2)\cdot(z^2+x^2)=0$.

22. Determinați numerele reale x care verifică inegalitatea $\left|4x^2-1\right|+|4x-5|\leq 3$

23. Arătați că numărul $A=998\dfrac{99}{112}\cdot 997\dfrac{99}{112}-999\dfrac{99}{112}\cdot 996\dfrac{99}{112}$ este natural.

24. Arătați că: $n<\dfrac{2^2+1}{2^2-1}+\dfrac{3^2+1}{3^2-1}+\dfrac{4^2+1}{4^2-1}+\ldots+\dfrac{n^2+1}{n^2-1}<n+\dfrac{1}{2}$, $\forall n\in\mathbb{N}, n\geq 4$.

Scanned with OKEN Scanner

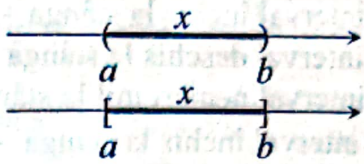
1.4. Intervale în $\mathbb{R}$. Definiție, reprezentare pe axă

Un *interval* este o submulțime nevidă I a mulțimii $\mathbb{R}$ cu proprietatea că, pentru orice $u, v \in I$, $u < v$, dacă x este un număr real cuprins între u și v, atunci $x \in I$.

1. **Intervale mărginite:** sunt intervalele a căror reprezentare geometrică (pe axa numerelor) este un segment. Un interval mărginit poate fi:

a. deschis: $(a,b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$

b. închis: $[a,b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \le x \le b\}$



c. semiînchise / semideschise:

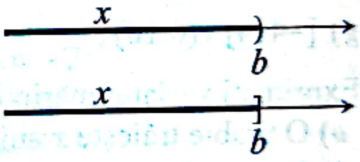
- închis la stânga și deschis la dreapta: $[a,b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \le x < b\}$;
- deschis la stânga și închis la dreapta: $(a,b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \le b\}$.

Observație. Un interval închis cu capetele egale se reduce la un punct: $[a,a] = \{a\}$.

2. **Intervale nemărginite:** sunt intervalele a căror reprezentare geometrică (pe axa numerelor) este o semidreaptă. Un interval nemărginit poate fi:

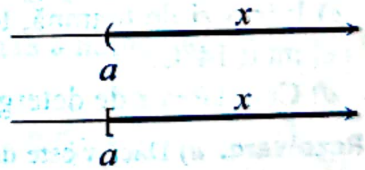
a. nemărginit la stânga și mărginit la dreapta:

- deschis la dreapta: $(-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < b\}$
- închis la dreapta: $(-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \le b\}$



b. nemărginit la dreapta și mărginit la stânga:

- deschis la stânga: $(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$
- închis la stânga: $[a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \ge a\}$



Observație. Mulțimea $\mathbb{R}$ este un interval nemărginit: $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$.

*

1. Scrieți sub formă de interval și apoi reprezentați pe axă mulțimea numerelor reale x care satisfac relația:
   a) $x \ge 3$; *b)* $x < -2$; *c)* $x < 6$; *d)* $x > 4,5$;
   e) $-1 \le x < 3$; *f)* $10 > x > 4$; *g)* $-2 \le x \le 5$; *h)* $0 < x < 7$.
2. Precizați care dintre mulțimile de mai jos sunt intervale:
   $A = \{-3; 5; 7\}$; $B = [-3, 7]$; $C = \{x \in \mathbb{R} \mid 4 \le x < 7,5\}$;
   $D = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \text{ divide } 6\}$; $E = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 \le x\}$; $F = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x < \frac{13}{5}\right\}$.

Scanned with OKEN Scanner

3. Stabiliți valoarea de adevăr a propozițiilor:
a) $-2 \in [-2,+\infty)$; *b)* $3 \in (0,3]$; *c)* $7 \in (-5,7)$;
d) $0,1 \in (0,+\infty)$; *e)* $-5 \notin (-\infty,-4)$; *f)* $-5 \in (-5,+\infty)$.

4. Scrieți următoarele mulțimi de numere reale sub formă de intervale folosind simboluri ca în exemplul dat:
a) interval deschis la stânga -7, închis la dreapta 3 se scrie $(-7;3]$;
b) interval deschis la stânga 0, deschis la dreapta 7 se scrie ..... ;
c) interval închis la stânga -1, închis la dreapta $+1$ se scrie ..... ;
d) interval deschis la stânga 4, nemărginit la dreapta se scrie ..... ;
e) interval nemărginit la stânga, închis la dreapta 9 se scrie ..... ;
f) interval închis la stânga -6, nemărginit la dreapta se scrie ..... .

5. Stabiliți valoarea de adevăr a propozițiilor:
a) $\mathbb{N} \subset [0;+\infty)$; *b)* $[0,+\infty) \subset \mathbb{N}$; *c)* $\{-1;1\} \subset [-1,1)$;
d) $(-2,3] \subset [-2,+\infty)$; *e)* $(-0,5;\ 3,2) \subset \mathbb{Q}$; *f)* $(-1,3] = [0,3]$.

6. Stabiliți valoarea de adevăr a propozițiilor:
a) „ $-2 \in (-\infty,-1)$ sau $-2 \in [0,+\infty)$ ”; *b)* „ $0 \in (-4,1)$ și $0 \in (-1,1)$ ”;
c) „ $3 \in (-2,4]$ și $3 \notin [-2,3)$ ”; *d)* „ $0 \in (-4,4)$ sau $0 \notin (-1,1)$ ”.

7. Efectuați, scriind mulțimile rezultate sub formă de interval:
a) $(0,5) \cup \{5\}$; *b)* $(-2,4] \cap (0,7)$; *c)* $(-\infty,7) \cap (3,20)$;
d) $(-3,7] \cup \{-3,7\}$; *e)* $(0,11) \cap [5,20]$; *f)* $(-\infty;\ 5) \cap (-3;+\infty)$;
g) $[-4;4] \setminus (0;10)$; *h)* $(-\infty;\ 20] \setminus (5;+\infty)$; *i)* $\mathbb{R} \setminus [3;+\infty)$.

8. Exprimați variația mărimilor următoare folosind notația cu intervale:
a) O vrabie trăiește x ani, $x \le 12$.
b) Pe autostradă se poate circula cu viteza x, cel mult egală cu 130 km/h.
c) Într-o zi de toamnă, temperatura x a aerului variază între 2°C (inclusiv) și cel mult 14°C.
d) Cantitatea x de detergent dintr-o cutie este de $2\text{kg} \pm 5\%$.

Rezolvare. *a)* Dacă x este durata în ani a vieții unei vrăbii, atunci $x \in [0\ ,\ 12]$.

9. Efectuați:
a) $(-1,7) \cup [5,12]$; *b)* $(-\infty,3] \setminus (0,\infty)$; *c)* $[-4,4] \cap [2,5]$;
d) $\mathbb{N} \cap [-3,3]$; *e)* $(-4,1] \cap \mathbb{Z}$; *f)* $(-\infty,1] \setminus (-\infty,1)$.

10. Reprezentați pe axa numerelor mulțimea numerelor reale x cu proprietatea:
a) $x \le 3$ și $x \ge -3$; *b)* $|x| \le 4$; *c)* $|x| < 2$.

11. Pornind de la echivalența „$|x| \le a$ dacă și numai dacă $-a \le x \le a$, unde $a \ge 0$”, scrieți următoarele mulțimi sub formă de intervale:
a) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid |x| \le 7\}$; *b)* $B = \{x \in \mathbb{R} \mid |x| < 3\}$;
c) $C = \{x \in \mathbb{R} \mid |x-1| < 2\}$; *d)* $D = \{x \in \mathbb{R} \mid |2x+3| \le 9\}$;
e) $E = \{x \in \mathbb{R} \mid |x+5| < -1\}$; *f)* $F = \{x \in \mathbb{R} \mid |2x-1| \le 0\}$.

Scanned with OKEN Scanner

12. Pornind de la echivalența „$|x| \geq a$ dacă și numai dacă $x \leq -a$ sau $x \geq a$, unde $a \geq 0$”, scrieți următoarele mulțimi ca reuniune de două intervale:

a) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid |x| \geq 3\}$; *b)* $B = \{x \in \mathbb{R} \mid |x| > 7\}$;

c) $C = \{x \in \mathbb{R} \mid |x| > 0\}$; *d)* $D = \{x \in \mathbb{R} \mid |x+1| \geq 2\}$;

e) $E = \{x \in \mathbb{R} \mid |2x+3| > 11\}$; *f)* $F = \{x \in \mathbb{R} \mid |3x-1| \geq 8\}$.

13. Se consideră mulțimile $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \in [-2,6]\}$ și $B = \{x \in \mathbb{R} \mid |x| \leq 3\}$.

a) Scrieți mulțimea B sub formă de interval.

b) Determinați *Card A* (*numărul de elemente* al mulțimii A);

c) Efectuați: $A \cup B$; $A \cap B$ și $A \setminus B$.

14. Se consideră mulțimea $D = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \text{ divide } 24\}$.

a) Enumerați elementele mulțimii D.

b) Determinați *Card D*.

c) Efectuați $D \cap \mathbb{Z}$.

* *

15. Scrieți sub formă de intervale următoarele mulțimi:

a) mulțimea numerelor reale negative;

b) mulțimea numerelor reale mai mici decât 3;

c) mulțimea numerelor reale mai mari sau egale cu – 2;

d) mulțimea numerelor reale mai mari decât – 1 și mai mici sau egale cu 7;

e) mulțimea numerelor reale pozitive mai mici decât 10;

f) mulțimea numerelor reale mai mici decât 20 și mai mari sau egale cu $\sqrt{5}$.

16. Scrieți ca interval și puneți în evidență pe câte o axă a numerelor fiecare dintre mulțimile:

a) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x \leq 6\}$; *b)* $B = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x < 0\}$;

c) $C = \{x \in \mathbb{R} \mid -5 < x \leq 0\}$; *d)* $D = \{x \in \mathbb{R} \mid 3 \leq x < 5\}$;

e) $E = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 1\}$; *f)* $F = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 4\}$.

g) $G = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 2\}$; *h)* $H = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 5\}$;

i) $I = \{x \in \mathbb{R} \mid \sqrt{5} \leq x < \sqrt{15}\}$; *j)* $F = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -\frac{2}{3} < x < \sqrt{7}\right\}$.

17. Precizați cel mai mic număr întreg care aparține intervalului I, dacă

a) $I = [-2;5)$; *b)* $I = \left(-3; \frac{11}{7}\right)$; *c)* $I = \left[-\frac{8}{3}; -1\right)$; *d)* $I = \left(-\frac{3}{10}; \frac{1}{2}\right]$.

18. Precizați cel mai mic număr întreg care **nu** aparține intervalului I, dacă

a) $I = (-\infty, 5)$; *b)* $I = (-\infty, -3)$; *c)* $I = (-\infty, 8]$; *d)* $I = (-\infty, 8]$.

19. Determinați cel mai mare număr întreg care aparține intervalului J, dacă

Scanned with OKEN Scanner

a) $J=[-4;3)$; *b)* $J=\left(-3;\frac{11}{3}\right)$; *c)* $J=\left[-\frac{8}{3};-1\right]$; *d)* $J=\left(-8;-\frac{3}{2}\right]$.

20. Determinați cel mai mare număr întreg care **nu** aparține intervalului J, dacă

a) $J=[-2,\infty)$; *b)* $J=(-3;\infty)$; *c)* $J=\left[\frac{8}{3};\infty\right)$; *d)* $J=\left(-\frac{3}{10};\infty\right]$.

21. Efectuați:

a) $(-3,7)\cup\{-3,7\}$; *b)* $[-2,5)\setminus\{-2\}$; *c)* $(-4,6]\cap\mathbb{Z}$;

d) $\mathbb{N}^*\cap(-5,7)$; *e)* $(-7,10)\cap(-4,15)$; *f)* $(-2,8]\cup[0,21]$.

g) $(-5,4)\cap\{4\}$; *h)* $(-5,4)\cap(-7,2)$; *i)* $[-5;-4]\cap[-4;3]$.

22. Fie a și b două numere reale cu $a<b$. Dacă $I=[a,b]$, $I=[a,b)$, $I=(a,b]$ sau $I=(a,b)$, numărul $l(I)=|a-b|$ se numește *lungimea intervalului mărginit I*. Calculați lungimea fiecăruia dintre intervalele:

a) $[9,15]$; *b)* $\left(-\frac{3}{7};\frac{11}{7}\right)$; *c)* $\left[-\frac{8}{3};-\frac{5}{3}\right)$; *d)* $\left(-\frac{3}{10};\frac{1}{2}\right]$.

23. Scrieți fiecare dintre următoarele mulțimi sub formă de interval. Calculați lungimea fiecărui interval obținut.

a) $A=\{x\in\mathbb{R}\mid |x|\le 10\}$; *b)* $B=\{x\in\mathbb{R}\mid |x-3|<7\}$;

c) $C=\left\{x\in\mathbb{R}\,\middle|\, -3\le\frac{x-5}{2}\le 3\right\}$; *d)* $D=\left\{x\in\mathbb{R}\,\middle|\, 2<\frac{x+3}{5}\le 6\right\}$;

e) $E=\{x\in\mathbb{R}\mid 2x+4\in[1;6]\}$; *f)* $F=\{x\in\mathbb{R}\mid 3x-1\in(-5;7)\}$.

Rezolvare. *c)* Înmulțind cu 2 fiecare membru al dublei inegalități și adunând apoi 5, obținem $-6\le x-5\le 6\Rightarrow -1\le x\le 11$, deci $C=[-1,11]$ și $l(C)=|11-(-1)|=12$.

24. Determinați Card X în fiecare dintre cazurile:

a) $X=\{x\in\mathbb{N}\mid x\in(-3;5)\}$; *b)* $X=\{x\in\mathbb{Z}\mid x\in[-4;2]\}$;

c) $X=\{x\in\mathbb{N}\mid x\le 3\}$; *d)* $X=\{x\in\mathbb{Z}^*\mid |x|<4\}$;

e) $X=\left\{x\in\mathbb{Z}\,\middle|\, -1<\frac{x-1}{3}<1\right\}$; *f)* $X=\{x\in\mathbb{Z}\mid x\in[0;n+1],\ n\in\mathbb{N}\}$.

25. Determinați numerele reale m și n, $m<n$, știind că:

a) $[m,n]\cup(-2,3)=[-5,4]$; *b)* $[m;n]\cap[m;5]=[-1;3]$;

c) $[m,n]\setminus(1,4)=[0,1]\cap[4,10]$; *d)* $(m;n]\cap[-10;n)=(-7;0)$.

26. Calculați: $A\cup B$, $A\cap B$, $A\setminus B$, $B\setminus A$, $A\cap\mathbb{N}$ și $B\cap\mathbb{Z}$ știind că:

a) $A=\{x\in\mathbb{R}\mid |x|\le 3\}$ și $B=\left\{x\in\mathbb{R}\,\middle|\, x\in\left(-2;8\frac{1}{3}\right)\right\}$;

b) $A=\{x\in\mathbb{R}\mid |2x+1|<7\}$ și $B=\left\{x\in\mathbb{R}\,\middle|\, \left|\frac{2x-1}{7}\right|\le 1\right\}$;

Scanned with OKEN Scanner

c) $A=\left\{x\in\mathbb{R}\,\middle|\,|x+2|<2\right\}$ şi $B=\left\{x\in\mathbb{R}\,\middle|\,\left|\frac{5x-3}{2}\right|\le 6\right\}$;

d) $A=\left\{x\in\mathbb{R}\,\middle|\,|11-x|\le 2\right\}$ şi $B=\left\{x\in\mathbb{R}\,\middle|\,\left|\frac{x}{6}-2\right|<\frac{1}{3}\right\}$;

e) $A=\left\{x\in\mathbb{R}\,\middle|\,2|x|\le 30-7|x|\right\}$ şi $B=\left\{x\in\mathbb{R}\,\middle|\,\left|\frac{2x-3}{5}\right|\le 2\right\}$;

f) $A=\left\{x\in\mathbb{R}\,\middle|\,|-x+1|<3\right\}$ şi $B=\left\{x\in\mathbb{R}\,\middle|\,\left|\frac{5x+4}{3}\right|<3\right\}$.

27. Determinaţi $m,n\in\mathbb{R}$ ştiind că:

a) $\left\{x\in\mathbb{R}\,\middle|\,|x|\le 3\right\}=\left\{x\in\mathbb{R}\,\middle|\,x+1\in[m,n]\right\}$;

b) $\left\{x\in\mathbb{R}\,\middle|\,|x-3|\le 5\right\}=\left\{x\in\mathbb{R}\,\middle|\,x\in[m,n]\right\}$.

28. Determinaţi, în fiecare caz, intervalul I care îndeplineşte simultan condiţiile:

a) $I\cup(-2,5]=(-2,7)$ şi $I\cap(-2,5]=[-1,5]$;

b) $I\cap(-1,4]=(0,4]$ şi $I\cup(-1,4]=(-1,5)$;

c) $I\cup[-5;3)=[-5;5]$ şi $I\cap[-5;3)=(0;3)$;

d) $I\cap(2;8)=(2;6]$ şi $I\cup(2;8)=[-3;8)$;

e) $I\cup[-7;-1]=[-7;4)$ şi $I\cap[-7;-1]=[-3;-1]$;

f) $I\cap(-2;8]=(-2;2)$ şi $I\cup(-2;8]=(-5;8]$.

29. Determinaţi numerele întregi a şi b astfel încât:

a) $(a,b)\cap\mathbb{N}=\{3\}$; b) $[a,b]\cap\mathbb{Z}=\{-3,-2\}$; c) $(a,b)\cap\mathbb{Z}=\{-3\}$;

d) $[3,a]\cap[b,7]=[4,6]$; e) $(a,b)\cap\mathbb{Z}=\{2,3\}$; f) $(a,-2)\cup(-3,b]=(-5,8]$.

Rezolvare. a) Deoarece $3\in(a,b)$, rezultă $a<3$ şi $3<b$. Presupunând $a<2$, ar rezulta $2\in(a,b)\cap\mathbb{N}$, fals. Dacă $a\ge 3$, atunci $3\notin(a,b)$. Deci $a=2$. Analog, $b=4$.

30. Efectuaţi:

a) $[-3;4)\cap\{-3;-2;-1;0;1;\ 2;\ 3;\ 4\}$; b) $\{-3;-2;-1;0;1;\ 2\}\setminus(-1;3)$;

c) $(-3;\ 3)\cap\mathbb{Z}^*$; d) $[-6;\ 8]\cap\mathbb{N}$;

e) $[-2;\ 3)\cup\{-2;-1;0;1;\ 2;\ 3\}$; f) $\{-3;-2;-1;0;1;\ 2;\ 3;\ 4\}\setminus\mathbb{N}^*$.

31. Stabiliţi dacă:

a) numărul $a=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}$ aparţine intervalului $\left[\frac{1}{2};0{,}9\right]$;

b) numărul $b=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{99\cdot 100}$ aparţine intervalului $\left[\frac{51}{100};1\frac{1}{10}\right]$.

c) numărul $c=\frac{6}{2\cdot 8}+\frac{10}{8\cdot 18}+\frac{14}{18\cdot 32}$ aparţine intervalului $\left(-1;\frac{7}{8}\right)$.

Scanned with OKEN Scanner

***

32. Se consideră intervalele mărginite I şi J astfel încât $I \cup J$ este interval. Determinaţi valoarea de adevăr a fiecăreia dintre propoziţiile:

a) $l(I \cup J) \le l(I) + l(J)$; *b)* $l(I \cap J) < l(I)$.

33. Scrieţi mulţimile A şi B ca intervale şi efectuaţi $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$ şi $B \cap \mathbb{N}^*$:

a) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid |x-2| > 1\}$ şi $B = \{x \in \mathbb{R} \mid |x| \le \sqrt{5}\}$;

b) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid |x+5| \ge 8\}$ şi $B = \left\{x \in \mathbb{Z} \,\middle|\, -1 < \frac{2x+5}{3} \le 9\right\}$.

34. Determinaţi $m, n \in \mathbb{R}$ ştiind că:

a) $[m; n] \subset \{x \in \mathbb{R} \mid 2 \le x+5 \le 11\}$ şi $\{-3; 6\} \subset [m; n]$;

b) $\{-2; 3\} \subset [m; n] \subset \{x \in \mathbb{R} \mid |2x-1| \le 5\}$.

35. Fie $0 \le a \le b$ şi $I = [a, b]$. Arătaţi că:

a) $\frac{a+b}{2} \in I$; *b)* $\sqrt{ab} \in I$; *c)* $\frac{2ab}{a+b} \in I$; *d)* $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \in I$.

36. Se consideră numerele reale a şi b, $a \le b$. Arătaţi că oricare ar fi $t \in [0,1]$, numărul $x = a(1-t) + bt$ aparţine intervalului $[a, b]$.

37. Se consideră intervalul deschis şi mărginit I cu proprietatea că $l(I) > 1$. Demonstraţi că $I \cap \mathbb{Z} \neq \emptyset$.

38. Numerele reale a, b şi c verifică relaţia $a^2 + b^2 + c^2 + 2a - 4b - 6c = 11$. Demonstraţi că: *a)* $a \in [-4, 6]$; *b)* $b \in [-3, 7]$; *c)* $c \in [-2, 8]$.

Indicaţie. *a)* Adunăm în ambii membri suma $1^2 + 2^2 + 3^2$ şi obţinem: $(a-1)^2 + (b-2)^2 + (c-3)^2 = 25 = 5^2$. Rezultă $(a-1)^2 \le 5^2$ sau $|a-1| \le 5$. Continuaţi!

Probleme de şapte stele

39. În intervalul $[0;1]$ se consideră numerele iraţionale a_1, a_2, a_3, a_4, a_5. Arătaţi că există $i, j \in \{1,2,3,4,5\}$, $i \neq j$, astfel încât $|a_i - a_j| < \frac{1}{4}$.

40. Se consideră intervalele $I = (a, 3b+1)$ şi $J = (3a-5, b+2)$, unde $a, b \in \mathbb{R}$.

a) Determinaţi $a, b \in \mathbb{Z}$ astfel încât $I \cap J \cap \mathbb{N} = \{2\}$.

b) Arătaţi că $I \cap J \neq \emptyset$, pentru orice alegere a numerelor reale a şi b.

41. Pentru fiecare număr natural $n \ge 1$ se consideră intervalul $I_n = \left[1 + \frac{4}{n}, 10 - \frac{4}{n}\right]$.

a) Determinaţi mulţimile $I_1 \cap \mathbb{N}$, $I_2 \cap \mathbb{N}$, $I_5 \cap \mathbb{N}$.

b) Demonstraţi că $I_n \subset I_{n+1}$, pentru orice $n \ge 1$

Scanned with OKEN Scanner

Marius PERIANU • Dumitru SĂVULESCU

E TESTE DE EVALUARE

Testul 1

1. Se consideră mulțimea: $A=\left\{1;-\frac{3}{2};\sqrt{3};\ 5+\sqrt{4};\pi;0;\sqrt{\frac{9}{4}}\right\}$.

(1p) *a)* Scrieți elementele mulțimii $A\cap\mathbb{Q}$;

(1p) *b)* Reprezentați pe axă numerele raționale din mulțimea A;

(1p) *c)* Ordonați crescător numerele din mulțimea A;

(1p) *d)* Scrieți elementele mulțimii $B=\left\{x\in\mathbb{R}\,\middle|\,-x\in A\right\}$;

(1p) *e)* Scrieți elementele mulțimii $C=\left\{x\in A\,\middle|\,-x\in A\right\}$.

2. Se consideră mulțimea $M=\left\{x\in\mathbb{R}\,\middle|\,|x|\le 4\right\}$;

(1p) *a)* Scrieți sub formă de interval mulțimea M;

(1p) *b)* Determinați $card(M\cap\mathbb{Z})$;

(1p) *c)* Arătați că, oricare ar fi $a\in\mathbb{R}$, dacă $a\notin M$, atunci $-a\notin M$;

(1p) *d)* Determinați cel mai mare număr real pozitiv b cu proprietatea că, pentru oricare $x\in(-b;b)\setminus\{0\}$, rezultă că $\frac{1}{x}\notin M$.

Notă: Timp de lucru 45 minute. Se acordă 1 punct din oficiu.

Testul 2

1. Se consideră numărul $q=-2,(24)$.

(1p) *a)* Scrieți numărul q sub forma unei fracții ireductibile $\frac{a}{b}$, cu $a\in\mathbb{Z}$, $b\in\mathbb{N}^*$.

(1p) *b)* Determinați partea întreagă a numărului q.

(1p) *c)* Calculați $[q]+[-q]$, unde $[x]$ reprezintă *partea întreagă* a numărului x.

(1p) *d)* Calculați partea fracționară a numărului q.

(1p) *e)* Arătați că numărul $|q|$ aproximează numărul $\sqrt{5}$ cu eroarea e, $e<10^{-1}$.

2. Se consideră mulțimea $F=\left\{\frac{1}{48};\frac{2}{48};\frac{3}{48};\ldots;\frac{47}{48}\right\}\subset\mathbb{Q}$.

(1p) *a)* Calculați suma elementelor mulțimii F.

(1p) *b)* Determinați numărul maxim de elemente care pot fi eliminate din mulțimea F astfel încât suma numerelor rămase să fie egală cu 23.

(1p) *c)* Determinați numerele $x\in F$ care pot fi reprezentate de fracții zecimale finite;

(1p) *d)* Găsiți numerele din mulțimea F care sunt pătrate de numere raționale.

Notă: Timp de lucru 45 minute. Se acordă 1 punct din oficiu.

Scanned with OKEN Scanner

E TESTE DE EVALUARE

Testul 1

1. Se consideră mulțimea: $A=\left\{1;-\frac{3}{2};\sqrt{3};\ 5+\sqrt{4};\pi;0;\sqrt{\frac{9}{4}}\right\}$.

(1p) *a)* Scrieți elementele mulțimii $A\cap\mathbb{Q}$;
(1p) *b)* Reprezentați pe axă numerele raționale din mulțimea A;
(1p) *c)* Ordonați crescător numerele din mulțimea A;
(1p) *d)* Scrieți elementele mulțimii $B=\{x\in\mathbb{R}\,|\,-x\in A\}$;
(1p) *e)* Scrieți elementele mulțimii $C=\{x\in A\,|\,-x\in A\}$.

2. Se consideră mulțimea $M=\{x\in\mathbb{R}\,||x|\le 4\}$;

(1p) *a)* Scrieți sub formă de interval mulțimea M;
(1p) *b)* Determinați $card(M\cap\mathbb{Z})$;
(1p) *c)* Arătați că, oricare ar fi $a\in\mathbb{R}$, dacă $a\notin M$, atunci $-a\notin M$;
(1p) *d)* Determinați cel mai mare număr real pozitiv b cu proprietatea că, pentru oricare $x\in(-b;b)\setminus\{0\}$, rezultă că $\frac{1}{x}\notin M$.

Notă: Timp de lucru 45 minute. Se acordă 1 punct din oficiu.

Testul 2

1. Se consideră numărul $q=-2,(24)$.

(1p) *a)* Scrieți numărul q sub forma unei fracții ireductibile $\frac{a}{b}$, cu $a\in\mathbb{Z}$, $b\in\mathbb{N}^*$.
(1p) *b)* Determinați partea întreagă a numărului q.
(1p) *c)* Calculați $[q]+[-q]$, unde $[x]$ reprezintă *partea întreagă* a numărului x.
(1p) *d)* Calculați partea fracționară a numărului q.
(1p) *e)* Arătați că numărul $|q|$ aproximează numărul $\sqrt{5}$ cu eroarea e, $e<10^{-1}$.

2. Se consideră mulțimea $F=\left\{\frac{1}{48};\frac{2}{48};\frac{3}{48};\ldots;\frac{47}{48}\right\}\subset\mathbb{Q}$.

(1p) *a)* Calculați suma elementelor mulțimii F.
(1p) *b)* Determinați numărul maxim de elemente care pot fi eliminate din mulțimea F astfel încât suma numerelor rămase să fie egală cu 23.
(1p) *c)* Determinați numerele $x\in F$ care pot fi reprezentate de fracții zecimale finite;
(1p) *d)* Găsiți numerele din mulțimea F care sunt pătrate de numere raționale.

Notă: Timp de lucru 45 minute. Se acordă 1 punct din oficiu.

Scanned with OKEN Scanner

Testul 3

1. Se consideră numărul $a=\sqrt{31}$.

(1p) ***a)*** Determinați numărul natural n cu proprietatea că $n<a<n+1$.

(1p) ***b)*** Determinați primele două zecimale ale numărului a.

(1p) ***c)*** Scrieți cel mai mic număr întreg din mulțimea $A=\{x\in\mathbb{R}\,|\,|x|\leq a\}$.

(1p) ***d)*** Arătați că $-2a<-11$.

(1p) ***e)*** Determinați numerele raționale x pentru care $|4x-1|=a^2$.

2. Se consideră mulțimea $M=\{\overline{n,(n)}\,|\,n\in\mathbb{N},3\leq n\leq 8\}$.

(1p) ***a)*** Arătați că, oricare ar fi $x\in M$, numărul $9x$ este un număr natural divizibil cu 10.

(1p) ***b)*** Dați exemplu de două numere din mulțimea M a căror sumă este pătratul unui număr rațional pozitiv, notat cu a.

(1p) ***c)*** Arătați că $a\in M$.

(1p) ***d)*** Fie $b\in M$. Se știe că numărul b aproximează numărul real y cu eroare cel mult egală cu 10^{-1}. Arătați că numărul b^{-1} aproximează numărul y^{-1} cu eroare cel mult egală cu 10^{-2}.

Notă: Timp de lucru 45 minute. Se acordă 1 punct din oficiu.

Testul 4

1. Se consideră numerele $a=\dfrac{10}{25}$ și $b=\dfrac{9}{15}$.

(1p) ***a)*** Reprezentați numărul b sub formă de fracție zecimală;

(1p) ***b)*** Determinați $\max(a;b)$;

(1p) ***c)*** Arătați că $a+b\in\mathbb{N}$;

(1p) ***d)*** Verificați dacă $a^2-b^2=a-b$;

(1p) ***e)*** Dați exemplu de două numere p și q, $p\in\mathbb{N}$ și $q\in\mathbb{N}^*$, cu proprietatea că

$$\min(a;b)<\frac{p}{q}<\max(a;b).$$

2. Se consideră numerele $m=3-2\sqrt{2}$ și $n=3+2\sqrt{2}$.

(1p) ***a)*** Justificați că $n\notin\mathbb{Q}$;

(1p) ***b)*** Verificați dacă $1\in(m;n)$;

(1p) ***c)*** Arătați că $m\cdot n\in\mathbb{Q}$;

(1p) ***d)*** Calculați $\{m\}+\{n\}$, unde $\{x\}$ reprezintă *partea fracționară* a numărului x.

Notă: Timp de lucru 45 minute. Se acordă 1 punct din oficiu.

Scanned with OKEN Scanner

Fișă pentru portofoliul individual

Numele și prenumele: _____

Clasa a VIII-a ____

A 1

Tema nr. I.1: Mulțimi de numere reale. Compararea numerelor reale. Modulul unui număr real. Intervale de numere reale

(1,5p) 1. Completați spațiile punctate astfel încât să obțineți afirmații adevărate:

a) Dintre numerele $\frac{3}{4}$ și -32 cel întreg este numărul ...

b) Fie mulțimea $A=\{x\in\mathbb{N}\,|\,x\le 2\}$. Cel mai mare număr din mulțimea A este egal cu ...

c) Modulul numărului $-\sqrt{5}$ este ....

(1,5p) 2. Pentru fiecare dintre enunțurile următoare, dacă enunțul este adevărat, încercuiți litera „A", în caz contrar încercuiți litera „F":

a) $3\sqrt{7}$ este număr irațional. **A** **F**

b) Dintre numerele $a=\frac{1}{2}$ și $b=0,2$ mai mare este numărul b. **A** **F**

c) $[-3;6]\cap(-\infty;0]=[-3;0)$ **A** **F**

(2p) 3. Încercuiți răspunsul corect la fiecare dintre următoarele exerciții. Dintre cele patru variante de răspuns, scrise la fiecare cerință, doar una este corectă.

a) Suma numerelor întregi conținute în intervalul $[-2;3]$ este egală cu:

A. -2 **B.** 0 **C.** 1 **D.** 3

b) $A=\{x\in\mathbf{R}\,|\,-3\le x-1\le 0\}$ **este egală cu:**

A. $(2;1)$ **B.** $\{-2;1\}$ **C.** $[-2;1]$ **D.** $\{-1;0;1\}$

c) Așezând în ordine crescătoare elementele mulțimii $B=\{2\sqrt{5};\ 4;\ 3\sqrt{2}\}$ se obține ordinea:

A. $2\sqrt{5};3\sqrt{2};4$ **B.** $4;3\sqrt{2};2\sqrt{5}$ **C.** $4;2\sqrt{5};3\sqrt{2}$ **D.** $2\sqrt{5};4;3\sqrt{2}$

d) Fie mulțimea $C=\{5;1;3;0\}$. Cea mai mică diferență între două elemente ale mulțimii C este egală cu:

A. -5 **B.** -8 **C.** -2 **D.** -3

Scanned with OKEN Scanner

La următoarele subiecte scrieți pe fișa de evaluare rezolvările complete.

(2,5p) 4. Se consideră mulțimile: $A=\{x\in\mathbb{R}\mid |2x+1|\le 5\}$ și $B=\left\{x\in\mathbb{R}\mid -3<\frac{x+1}{2}\le 1\right\}$.

Calculați $A\cup B, A\cap B, A-B, B-A$.

(1,5p) 5. Stabiliți dacă numărul $a=\frac{2}{1\cdot 3}+\frac{2}{3\cdot 5}+\ldots+\frac{2}{49\cdot 51}$ aparține intervalului $\left(\frac{1}{2};1\right)$.

NOTĂ: Timp de lucru 50 minute. Se acordă un punct din oficiu.

Scanned with OKEN Scanner

1.5. Operații cu numere reale

Adunarea este operația prin care oricărei perechi de numere reale x și y, i se asociază un număr real, notat $x+y$, numit ***suma*** numerelor x și y.

Proprietățile operației de adunare

1. Adunarea este *asociativă*: $(a+b)+c=a+(b+c)$, oricare ar fi $a, b, c \in \mathbb{R}$.
2. Numărul real 0 este *element neutru*: $a+0=0+a=a$, oricare ar fi $a \in \mathbb{R}$.
3. Orice număr real a are un *opus notat* $-a$ cu proprietatea: $a+(-a)=(-a)+a=0$.
4. Adunarea este *comutativă*: $a+b=b+a$, oricare ar fi $a, b \in \mathbb{R}$.

Scăderea este operația prin care, oricărei perechi de numere reale x și y, i se asociază un număr real numit ***diferența*** numerelor x și y, notat $d=x-y=x+(-y)$.

Înmulțirea este operația prin care, oricărei perechi de numere reale x și y i se asociază un număr real, notat $x \cdot y = xy$, numit ***produsul*** numerelor x și y.

Proprietățile operației de înmulțire

1. Înmulțirea este *asociativă*: $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$, oricare ar fi $a,b,c \in \mathbb{R}$.
2. Numărul real 1 este *element neutru*: $a \cdot 1 = 1 \cdot a$, oricare ar fi $a \in \mathbb{R}$.
3. Orice număr real $a \neq 0$ are un *invers*: $a^{-1} = \frac{1}{a}$ cu proprietatea $a \cdot \frac{1}{a} = \frac{1}{a} \cdot a = 1$.
4. Înmulțirea este *comutativă*: $a \cdot b = b \cdot a$, oricare ar fi $a,b \in \mathbb{R}$.
5. Înmulțirea este *distributivă* în raport cu adunarea și scăderea numerelor reale: $a \cdot (b \pm c) = a \cdot b \pm a \cdot c$, oricare ar fi $a,b,c \in \mathbb{R}$.

Împărțirea este operația prin care oricărei perechi de numere reale x și y, $y \neq 0$, i se asociază un număr real, notat $x : y = \frac{x}{y} = x \cdot y^{-1}$, numit *câtul* numerelor x și y.

Ridicarea la putere cu exponent număr întreg.

Fie $a \in \mathbb{R}$ și $n \in \mathbb{N}^*$. Definim $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ factori}}$ și, pentru $a \neq 0$, $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$.

Spunem că a^n este puterea n a numărului real a. În scrierea a^n, numărul a se numește *baza* puterii, iar numărul n se numește *exponentul* puterii.

Observație. Pentru orice $a \in \mathbb{R}$ avem $a^1 = a$, iar dacă $a \neq 0$, definim $a^0 = 1$.

0^0 este *operație fără sens*.

Reguli de calcul cu puteri

1. $a^m \cdot a^n = a^{n+m}$, oricare ar fi $a \in \mathbb{R}^*$ și oricare ar fi $m, n \in \mathbb{Z}$.
2. $a^m : a^n = a^{m-n}$, oricare ar fi $a \in \mathbb{R}^*$ și oricare ar fi $m, n \in \mathbb{Z}$.

Scanned with OKEN Scanner

3. $(a^m)^n = a^{m\cdot n}$, oricare ar fi $a \in \mathbb{R}^*$ şi oricare ar fi $m, n \in \mathbb{Z}$.

4. $(a\cdot b)^m = a^m \cdot b^m$, oricare ar fi $a \in \mathbb{R}^*$ şi oricare ar fi $m \in \mathbb{Z}$.

5. $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$, oricare ar fi $a, b \in \mathbb{R}^*$ şi oricare ar fi $m \in \mathbb{Z}$.

Rădăcina pătrată a unui număr real $a \geq 0$ este numărul real r, $r \geq 0$, cu proprietatea $r^2 = a$. Notăm: $r = \sqrt{a}$.

Reguli de calcul cu radicali

1. $\sqrt{a^2} = |a|$, oricare ar fi $a \in \mathbb{R}$.

2. $\sqrt{a\cdot b} = \sqrt{a}\cdot\sqrt{b}$, pentru $a \geq 0, b \geq 0$. Consecinţă: $\left(\sqrt{a}\right)^n = \sqrt{a^n}$, $n \in \mathbb{N}$.

3. $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$, pentru $a \geq 0$ şi $b > 0$. Consecinţă: $\left(\sqrt{\frac{a}{b}}\right)^n = \frac{\left(\sqrt{a}\right)^n}{\left(\sqrt{b}\right)^n}$, $n \in \mathbb{N}$.

4. Introducerea factorilor sub radical: $a\sqrt{b} = \begin{cases} \sqrt{a^2\cdot b}, \text{ dacă } a \geq 0, b \geq 0 \\ -\sqrt{a^2\cdot b}, \text{ dacă } a < 0, b \geq 0 \end{cases}$.

5. Scoaterea factorilor de sub radical: $\sqrt{a^2\cdot b} = |a|\cdot\sqrt{b}$, pentru orice $a \in \mathbb{R}$ şi $b \geq 0$.

Medii. Dacă a şi b sunt numere reale, $a \leq b$, atunci orice număr $m \in [a,b]$ este o ***medie*** a numerelor a şi b.

1. Media aritmetică a numerelor a şi b este numărul real $m_a = \frac{a+b}{2}$.

Media aritmetică a numerelor reale $a_1, a_2, ..., a_n$ este $m_a = \frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n}$.

2. Media aritmetică ponderată. Fie $p_1, p_2, ..., p_n$ sunt numere reale pozitive. Media aritmetică ponderată a numerelor $a_1, a_2, ..., a_n$, cu ponderile $p_1, p_2, ..., p_n$, este numărul real $m_{ap} = \frac{a_1p_1 + a_2p_2 + ... + a_np_n}{p_1 + p_2 + ... + p_n}$.

Observaţie: Dacă $p_1 = p_2 = ... = p_n$, atunci media aritmetică ponderată a numerelor $a_1, a_2, ..., a_n$ coincide cu media lor aritmetică.

3. Media geometrică a numerelor reale pozitive a şi b este numărul $m_g = \sqrt{ab}$.

4. Media armonică a numerelor reale $a, b > 0$ este numărul $m_h = \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} = \frac{2ab}{a+b}$.

5. Media pătratică a numerelor reale $a, b \geq 0$ este numărul $m_p = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}$.

Scanned with OKEN Scanner

*

1. Calculați:

a) $-17+8$; *b)* $\frac{5}{7}+\left(-\frac{19}{7}\right)$; *c)* $12+(-12)$; *d)* $9+(-9+13)$;

e) $0+(-4)$; *f)* $-\frac{15}{3}+0$; *g)* $-\frac{5}{2}+2{,}5$; *h)* $-3\frac{1}{2}+2{,}5$;

i) $-\sqrt{3}-4\sqrt{3}$; *j)* $\frac{5}{6}-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)$; *k)* $1{,}(3)+[1{,}(6)-2]$; *l)* $\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{6}\right)-0{,}(6)$;

m) $7\sqrt{5}+2\sqrt{5}$; *n)* $\left(1-\frac{1}{2}\right)-\left(-\frac{1}{2}\right)$; *o)* $\sqrt{7}+(-\sqrt{7})$; *p)* $\sqrt{2}-2\sqrt{2}$.

2. Calculați:

a) $\left(-1\frac{1}{3}+\frac{5}{7}\right)+\left(\frac{11}{3}-\frac{12}{7}\right)$; *b)* $\left(3-\sqrt{5}\right)+\left(\sqrt{5}-4\right)$;

c) $3\frac{1}{11}-\left(2\frac{3}{23}+\frac{23}{11}\right)-\frac{20}{23}$; *d)* $\left(1+2\sqrt{2}\right)-\left(3\sqrt{2}-7\right)-\left(8-\sqrt{2}\right)$.

3. Calculați $x+y+z$, $-x+y+z$, $x-y+z$ și $x+y-z$ în fiecare din cazurile:

a) $x=1$, $y=-2$, $z=4$; *b)* $x=-\frac{1}{2}$, $y=\frac{1}{3}$, $z=\frac{1}{6}$;

c) $x=\sqrt{4}$, $y=-\sqrt{9}$, $z=\sqrt{49}$; *d)* $x=\frac{\sqrt{16}}{\sqrt{36}}$, $y=\sqrt{2\frac{1}{4}}$, $z=-\sqrt{1{,}25}$;

e) $x=\sqrt{5}$, $y=-3\sqrt{5}$, $z=-\sqrt{5}$; *f)* $x=1+\sqrt{3}$, $y=-2\sqrt{3}$, $z=2-\sqrt{3}$.

4. Calculați:

a) $-5\cdot 6$; *b)* $312:(-3)$; *c)* $\sqrt{5}\cdot(-\sqrt{3})$; *d)* $\left(-\frac{2}{5}\right)\cdot 2{,}5$;

e) $3\cdot(-\sqrt{5})$; *f)* $3\frac{1}{4}\cdot\left(-1\frac{3}{13}\right)$; *g)* $-\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{\sqrt{3}}{6}$; *h)* $\frac{-5}{\sqrt{10}}\cdot\frac{3\sqrt{10}}{4}$;

i) $\left(-\frac{2}{3}\right)\cdot\left(-\frac{5}{6}\right)$; *j)* $-\frac{4}{15}:1\frac{1}{5}$; *k)* $314:(-100)$; *l)* $\sqrt{30}:\sqrt{6}$;

m) $\sqrt{6}:\frac{1}{2}$; *n)* $(10\sqrt{3}):(-5)$; *o)* $(-8\sqrt{3}):(8\sqrt{3})$; *p)* $\frac{-2\sqrt{5}}{\sqrt{6}}:\frac{-6\sqrt{5}}{-2\sqrt{6}}$.

5. Calculați xyz, $\frac{yz}{x}$, $\frac{zx}{y}$ și $\frac{xy}{z}$ în fiecare din cazurile:

a) $x=1$, $y=-2$, $z=4$; *b)* $x=-\frac{1}{2}$, $y=\frac{1}{3}$, $-z=\frac{1}{6}$;

c) $x=\sqrt{2}$, $y=-\sqrt{3}$, $z=\sqrt{7}$; *d)* $x=\frac{\sqrt{36}}{\sqrt{100}}$, $y=\sqrt{1\frac{9}{16}}$, $z=-\sqrt{1{,}25}$;

Scanned with OKEN Scanner

e) $x=\sqrt{5}$, $y=-3\sqrt{5}$, $z=-\sqrt{5}$; *f)* $x=-\sqrt{3}$, $y=\frac{-2}{\sqrt{3}}$, $z=\frac{1}{\sqrt{3}}$.

6. Efectuați:

a) $-4\cdot\left(-25+15\right)$; *b)* $8\cdot\left(\frac{3}{4}-\frac{5}{8}-3\frac{1}{2}\right)$;

c) $\left(\frac{7}{5}-2{,}5+5\frac{1}{2}\right)\cdot(-10)$; *d)* $\left(\frac{2}{3}+\frac{5}{9}-2\frac{7}{12}\right)\cdot\left(-7\frac{1}{5}\right)$;

e) $\sqrt{3}\cdot\left(\sqrt{7}-\sqrt{5}+\sqrt{2}\right)$; *f)* $-\sqrt{5}\cdot\left(\sqrt{5}-2\sqrt{11}+3\right)$;

g) $\left(2\sqrt{3}+3\sqrt{2}-\frac{5\sqrt{7}}{6}\right)\cdot\left(-12\sqrt{5}\right)$; *h)* $\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}-\frac{3\sqrt{5}}{\sqrt{6}}\right)\cdot\left(-5\sqrt{18}\right)$.

7. Efectuați:

a) $\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}:\sqrt{2}$; *b)* $\left(-2\sqrt{3}\right)\cdot\left(3\sqrt{2}\right):(-6)$;

c) $\sqrt{3}\cdot\left(\sqrt{3}-1\right)$; *d)* $2\sqrt{5}\cdot\left(-\sqrt{3}-5\sqrt{2}+3\right)$;

e) $\left(2\sqrt{3}-3\sqrt{2}\right)\cdot\left(3\sqrt{3}+2\sqrt{2}\right)$; *f)* $\left(2\sqrt{7}-1\right)\cdot\left(3\sqrt{5}-\sqrt{7}+2\right)$.

8. Arătați că numărul x este inversul numărului y în următoarele situații:

a) $x=\sqrt{5}-2$ și $y=\sqrt{5}+2$; *b)* $x=\sqrt{3}-\sqrt{2}$ și $y=\sqrt{3}+\sqrt{2}$;

c) $x=\frac{\sqrt{7}-\sqrt{3}}{2}$ și $y=\frac{\sqrt{7}+\sqrt{3}}{2}$; *d)* $x=3\sqrt{5}+2\sqrt{11}$ și $y=3\sqrt{5}-2\sqrt{11}$.

9. Calculați:

a) 3^2; *b)* $(-3)^3$; *c)* $(-0{,}1)^3$; *d)* 10^{-3};

e) $\left(\frac{1}{2}\right)^2$; *f)* $\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$; *g)* $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$; *h)* $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{-2}$;

i) $\left(-\sqrt{2}\right)^2$ *j)* $\left(-\sqrt{2}\right)^3$; *k)* $\left(-2\frac{1}{2}\right)^3$; *l)* $\left(-\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^{-3}$.

10. Calculați:

a) $0-2^2$; *b)* $6-2^3$; *c)* $-3^2+(-3)^2$;

d) $(-1)^5+(-1)^6$; *e)* $3\sqrt{2}-\left(\sqrt{2}\right)^3$; *f)* $5\cdot4-(-2)^2$;

g) $(-1)^{-1}+2^{-2}$; *h)* $\left(-\frac{2}{3}\right)^{-1}+\left(-\frac{2}{3}\right)^{-2}$; *i)* $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{-2}-\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{-3}$.

11. Scrieți în ordine crescătoare numerele:

a) $\left(\sqrt{2}\right)^0;\left(\sqrt{2}\right)^3;\left(\sqrt{2}\right)^1;\left(\sqrt{2}\right)^4$; *b)* $\left(-\sqrt{2}\right)^0;\left(-\sqrt{2}\right)^3;\left(-\sqrt{2}\right)^1;\left(-\sqrt{2}\right)^4$;

c) $\left(\sqrt{3}\right)^0;\left(\sqrt{3}\right)^{-3};\left(\sqrt{3}\right)^{-1};\left(\sqrt{3}\right)^{-4}$; *d)* $\left(-\sqrt{3}\right)^0;\left(-\sqrt{3}\right)^{-3};\left(-\sqrt{3}\right)^{-1};\left(-\sqrt{3}\right)^{-4}$.

Scanned with OKEN Scanner

12. Folosind algoritmul de extragere a rădăcinii pătrate, determinați primele două zecimale ale numerelor: *a)* $\sqrt{10}$; *b)* $\sqrt{125}$; *c)* $\sqrt{5112}$; *d)* $\sqrt{23547}$.

13. Scoateți factori de sub radical ($a, b \in \mathbb{R}$):

a) $\sqrt{5^2 \cdot 3}$; *b)* $\sqrt{3^2 \cdot 7}$; *c)* $\sqrt{2^2 \cdot 3^3 \cdot 11}$;

d) $\sqrt{49 \cdot a^4 \cdot 5}$; *e)* $\sqrt{81^3 \cdot 101}$; *f)* $\sqrt{25 \cdot a^4 \cdot b^8 \cdot 17}$.

14. Scoateți factori de sub radical ($a, b \in \mathbb{R}$):

a) $\sqrt{12}$; *b)* $\sqrt{20}$; *c)* $\sqrt{63}$; *d)* $\sqrt{75}$;

e) $\sqrt{98}$; *f)* $\sqrt{32}$; *g)* $\sqrt{200}$; *h)* $\sqrt{1000}$;

i) $\sqrt{243}$; *j)* $\sqrt{363}$; *k)* $\sqrt{18a^4}$; *l)* $\sqrt{50a^2b^4}$.

15. Scoateți factori de sub radical și apoi calculați:

a) $\sqrt{3}+2\sqrt{27}-\sqrt{75}$; *b)* $\sqrt{44}+5\sqrt{99}-3\sqrt{11}-\sqrt{275}$;

c) $-3\sqrt{20}+\sqrt{80}-\sqrt{405}$; *d)* $\sqrt{32}-\sqrt{8}+\sqrt{98}-5\sqrt{18}$;

e) $\sqrt{24}-3\sqrt{54}+\sqrt{600}$; *f)* $-3\sqrt{28}+2\sqrt{700}+\sqrt{448}$.

16. Introduceți factorul sub radical:

a) $2\sqrt{5}$; *b)* $-7\sqrt{11}$; *c)* $13\sqrt{2}$; *d)* $8\sqrt{3}$;

e) $10\sqrt{13}$; *f)* $a\sqrt{8}$, $a>0$; *g)* $3x\sqrt{5}$ $(x<0)$; *h)* $3a^2\sqrt{5}$; $a \in \mathbb{R}$.

17. Comparați numerele:

a) $\sqrt{50}$ și 7; *b)* $2\sqrt{3}$ și $3\sqrt{2}$; *c)* -5 și $-2\sqrt{6}$; *d)* $\sqrt{35}-6$ și 0;

e) $\frac{8}{5}$ și $\frac{6\sqrt{7}}{10}$; *f)* $7-4\sqrt{3}$ și 0; *g)* $\frac{\sqrt{5}}{7}$ și 3; *h)* $\frac{\sqrt{3}}{3}-\frac{2\sqrt{2}}{5}$ și 0.

18. Determinați primele două zecimale exacte ale numerelor:

a) $\sqrt{5}$; *b)* $\frac{\sqrt{7}}{5}$; *c)* $6\sqrt{5}$; *d)* $15\sqrt{2}$.

19. Calculați media aritmetică a numerelor:

a) 10 și 36; *b)* $\frac{3}{5}$ și $2\frac{2}{5}$; *c)* $-\sqrt{3}$ și $\sqrt{3}$.

d) $2-\sqrt{3}$ și $2+\sqrt{3}$; *e)* $3\sqrt{2}-4$ și $3\sqrt{2}+4$; *f)* $\frac{\sqrt{3}}{3}-\frac{1}{2}$ și $\frac{\sqrt{3}}{3}+\frac{1}{2}$.

20. Calculați media geometrică a numerelor a și b unde:

a) $a=13$ și $b=52$; *b)* $a=\sqrt{5}$ și $b=45\sqrt{5}$;

c) $a=222$ și $b=888$; *d)* $a=3\left(\sqrt{5}-1\right)$ și $b=3\left(\sqrt{5}+1\right)$.

21. *a)* Scrieți numărul $\sqrt{2}$ ca sumă între un număr rațional și un număr irațional;
b) Scrieți numărul 2 ca sumă de două numere iraționale.

22. *a)* Dați un exemplu de două numere iraționale x și y cu proprietatea că numerele $x+y$ și xy sunt simultan numere raționale.

Scanned with OKEN Scanner

b) Dați un exemplu de două numere iraționale pozitive x și y cu proprietatea că numerele $x+y$ și xy sunt simultan numere raționale.

23. Media aritmetică a numerelor a și b este -4. Determinați numărul b dacă:

a) $a=13$; *b)* $a=2,5$; *c)* $a=-2\frac{1}{3}$; *d)* $a=2\sqrt{2}$.

24. Media geometrică a numerelor a și b este 6. Determinați numărul b dacă:

a) $a=4$; *b)* $a=1,(5)$; *c)* $a=3\frac{1}{5}$; *d)* $a=2\sqrt{6}$.

25. Determinați numerele $x\in\mathbb{R}$ în următoarele cazuri:

a) $x+2\sqrt{5}=\sqrt{5}$; *b)* $2x=\sqrt{12}$; *c)* $\frac{x}{\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$.

d) $\frac{3\sqrt{15}}{x}=\frac{15}{\sqrt{60}}$; *e)* $\sqrt{7x^2}=\sqrt{28}$; *f)* $\sqrt{(x-\sqrt{7})^2}=1$.

**

26. Calculați:

a) $(-5)\cdot(-134)+(-5)\cdot 34$; *b)* $15-(-3)\cdot[25:(-5)+13]$;

c) $(-2)^3-2^3+2^4$; *d)* $18-2\cdot 3^2+17^2:(-17)$;

e) $\left[(-4)^5\right]^6-16^{15}$; *f)* $81\cdot 1111^4-3333^4$.

27. Calculați:

a) $17,5\cdot 2,4-30$; *b)* $3428:100+5,72$;

c) $34:10-5\cdot 2,2+18,6$; *d)* $0,2(5)-3,5(8)$;

e) $11,(4)+10\cdot 34,2(5)$; *f)* $0,1\cdot\left[0,1^2-0,1\cdot(0,1^3+0,099)\right]$.

28. Efectuați:

a) $\frac{5}{11}-\frac{23}{11}+\frac{3}{11}$; *b)* $\left(-\frac{34}{7}\right)\cdot\left(-\frac{21}{17}\right)$;

c) $\left(-\frac{2}{3}\right)^3-2,(1)$; *d)* $\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{2}+\frac{5}{4}\right)-\left(1-\frac{5}{12}-\frac{1}{6}\right)$;

e) $\frac{17}{240}-\frac{13}{80}+\frac{5}{24}-\frac{11}{60}$; *f)* $12\cdot\left[\frac{1}{4}+\left(\frac{9}{26}-\frac{2}{13}\right):\frac{5}{13}\right]+\left(-\frac{1}{2}\right)$.

29. Efectuați:

a) $7\sqrt{5}+2\sqrt{5}$; *b)* $11\sqrt{3}-4\sqrt{3}$;

c) $13\sqrt{7}-6\sqrt{7}-7\sqrt{7}$; *d)* $-23\sqrt{2}-4\sqrt{2}+30\sqrt{2}$;

e) $5\sqrt{37}+2-5\sqrt{37}+10$; *f)* $18-5\sqrt{3}+7+2\sqrt{3}$.

g) $2\sqrt{13}+7-(7-3\sqrt{13})$; *h)* $3(\sqrt{5}-\sqrt{3})+5(\sqrt{3}+\sqrt{5})$.

Scanned with OKEN Scanner

30. Efectuați:

a) $7\sqrt{5}\cdot(-2\sqrt{5})$; *b)* $2\sqrt{3}\cdot(7-4\sqrt{3})$;

c) $(3\sqrt{7}-2)\cdot(-6+5\sqrt{7})$; *d)* $(-50\sqrt{6}):(-5\sqrt{2})$;

e) $(25\sqrt{30}-5\sqrt{35}):(-5\sqrt{5})$; *f)* $(-35\sqrt{10}+2\sqrt{10}):(-\sqrt{2}-10\sqrt{2})$.

31. Calculați sumele:

a) $S=(\sqrt{3})^1+(\sqrt{3})^2+(\sqrt{3})^3+(\sqrt{3})^4+(\sqrt{3})^5$;

b) $T=\sqrt{(-7)^0}+\sqrt{(-7)^2}+\sqrt{7^3}+\sqrt{(-7)^4}+\sqrt{7^5}$.

32. Stabiliți care din următoarele propoziții sunt adevărate:

a) $\sqrt{5}(2\sqrt{5}-\sqrt{3})=10-\sqrt{15}$; *b)* $-32\sqrt{24}:(-8\sqrt{6})=4\sqrt{6}$;

c) $\sqrt{7}(\sqrt{7}-\sqrt{6})+\sqrt{6}(\sqrt{7}-\sqrt{6})=1$; *d)* $(7\sqrt{2}-21\sqrt{8}):(-7\sqrt{2})=-4$.

33. Calculați:

a) $\sqrt{3^2+4^2}+\sqrt{7^2+15^2}+\sqrt{5^2+12^2}$;

b) $(2\sqrt{3})^2-\sqrt{6^2}+\sqrt{(-5)^2}-(-2)^3\sqrt{(-12)^2}$;

c) $\sqrt{12}\cdot\sqrt{3}+\sqrt{20}\cdot\sqrt{5}-\sqrt{3}\cdot\sqrt{6}\cdot\sqrt{18}+\sqrt{2^4\cdot7^2}$;

d) $\sqrt{5}\left\{4+2\cdot\left[(\sqrt{7}-\sqrt{3})(\sqrt{7}+\sqrt{3})-2\right]\right\}$;

e) $(\sqrt{4}+\sqrt{9}-\sqrt{13})(5+\sqrt{13})-\sqrt{(-7)^2}$;

f) $15\sqrt{80}:(3\sqrt{5})+6\sqrt{288}:(-2\sqrt{2})-21\sqrt{338}:(-7\sqrt{2})$;

g) $(2-\sqrt{3}+\sqrt{5})(2+\sqrt{3}-\sqrt{5})-2\sqrt{15}$.

h) $(\sqrt{10}-3)(\sqrt{10}+3)+(5\sqrt{3}-2)(5\sqrt{3}+2)+(1-\sqrt{2})^2+2\sqrt{2}$;

34. Fie numărul $a=\sqrt{(1+\sqrt{5})^2}+(\sqrt{5}-1)^2+(\sqrt{5}-\sqrt{3})(\sqrt{5}+\sqrt{3})-(3-\sqrt{5})^2$.

Determinați numerele întregi b, c și numărul natural d, știind că $a=b+c\sqrt{d}$.

35. Introduceți factorul sub radical:

a) $2\cdot\sqrt{1,25}$; *b)* $(-5)\cdot\sqrt{\frac{3}{5}}$; *c)* $\left(-\frac{2}{3}\right)\cdot\sqrt{\frac{1}{2}}$; *d)* $1\frac{2}{3}\cdot\sqrt{6}$;

e) $a\sqrt{2}, a<0$; *f)* $a^2\sqrt{2}, a\in\mathbb{R}$ *g)* $n\sqrt{n}, n\in\mathbb{N}$ *h)* $ac^3\sqrt{7}, ac\geq 0$.

36. Scoateți factori de sub radical:

a) $\sqrt{44x^2}, x<0$; *b)* $\sqrt{49\cdot(5b^2)^2}, b\in\mathbb{R}$; *c)* $-\sqrt{\frac{a^{-4}}{b^2}}, a\in\mathbb{R}^*, b<0$.

37. Scoateți factori de sub radical și apoi calculați:

a) $\sqrt{12}+2\sqrt{27}-\sqrt{75}$; *b)* $\sqrt{44}+5\sqrt{99}-\sqrt{275}$; *c)* $-3\sqrt{20}+\sqrt{80}-\sqrt{405}$.

Scanned with OKEN Scanner

38. Efectuați:

a) $\sqrt{96}\cdot\left(\sqrt{54}-\sqrt{150}+\sqrt{216}\right)-5\sqrt{225}$;

b) $\sqrt{35}\cdot\sqrt{63}-\left(2\sqrt{45}-\sqrt{80}+\sqrt{845}\right)$;

c) $\sqrt{98}\cdot\left(\sqrt{162}-\sqrt{450}\right)+\sqrt{12}\cdot\left(\sqrt{108}+\sqrt{192}\right)$;

d) $62+\left(3\sqrt{75}+\sqrt{432}\right)\cdot\left(\sqrt{588}-\sqrt{6}\cdot\sqrt{128}\right)$.

39. Calculați:

a) $\left(\sqrt{98}-4\sqrt{8}\right)\cdot\left(3\sqrt{648}+9\sqrt{242}-\sqrt{126}\cdot\sqrt{567}\right)$;

b) $\left(\sqrt{735}+\sqrt{27}\cdot\sqrt{180}\right)\cdot\left(\sqrt{45}\cdot\sqrt{48}-\sqrt{1815}\right):15$;

c) $\left[\left(15\sqrt{2}-18\sqrt{3}\right)\left(6\sqrt{3}+14\sqrt{2}\right)-6\right]:9+18\sqrt{6}$;

d) $\left[\sqrt{20}\cdot\left(\sqrt{150}+4\sqrt{96}\right)-2\sqrt{135}\cdot\sqrt{72}\right]\cdot\left(\sqrt{30}+\sqrt{120}\right)$.

40. Efectuați calculele:

a) $2+\left[\sqrt{1152}-\sqrt{48}\cdot\left(\sqrt{432}-\sqrt{192}\right)\right]:24$;

b) $\left[\sqrt{512}-\left(3\sqrt{8}+2\sqrt{288}\right):10\right]\cdot\left(\sqrt{2}+1\right)-\sqrt{338}$;

c) $100-2\sqrt{192}\cdot\left[6\sqrt{432}-4\cdot\left(\sqrt{243}-\sqrt{75}\right)\right]:32$;

d) $98+\left(2\sqrt{150}+\sqrt{128}\cdot\sqrt{75}\right)\cdot\left(\sqrt{96}+\sqrt{486}-10\sqrt{24}\right):21$;

e) $\sqrt{500}-\left[\sqrt{5445}-5\cdot\left(2\sqrt{245}-3\sqrt{15}\cdot\sqrt{48}\right)\right]:13$.

41. Arătați că:

a) $a=\sqrt{3-\sqrt{5}+\sqrt{9-4\sqrt{5}}}\in\mathbb{Z}$;

b) $b=\sqrt{4+2\sqrt{3}}+\sqrt{11-8\cdot\sqrt{4-2\sqrt{3}}}\in\mathbb{N}$;

c) $c=\frac{1}{3}\cdot\left(\sqrt{5+\sqrt{24}}-\sqrt{5-\sqrt{24}}-\sqrt{8}\right)\in\mathbb{Z}$;

d) $d=\frac{1}{2}\left(\sqrt{38-12\sqrt{2}}+\sqrt{51+14\sqrt{2}}\right)\in\mathbb{Q}\setminus\mathbb{Z}$.

42. Calculați suma: $S=\frac{1}{2\cdot3}+\frac{1}{3\cdot4}+\frac{1}{4\cdot5}+\ldots+\frac{1}{99\cdot100}$.

43. Dacă $n\in\mathbb{N}$, determinați valorile posibile ale expresiei

$$E(n)=(-1)^n\cdot0,2(5)-(-1)^{n+1}\cdot0,7+(-1)^{n+2}\cdot\frac{7}{90}-(-1)^{n+3}:\frac{10}{3}.$$

Scanned with OKEN Scanner

***

44. Calculați x^2, unde

$$x=\sqrt{\sqrt{5}\left(\sqrt{5}-\sqrt{7}\right)-\sqrt{7}\left(\sqrt{5}-\sqrt{7}\right)}+\sqrt{\sqrt{5}\left(\sqrt{5}+\sqrt{7}\right)+\sqrt{7}\left(\sqrt{5}+\sqrt{7}\right)}.$$

45. Stabiliți care dintre următoarele propoziții sunt adevărate:

a) "$\sqrt{(-144)^2}+\sqrt{64}-\sqrt{13^2}+\sqrt{(-8)^2}\in\mathbb{Z}$";

b) "$\left|7\sqrt{5}-5\sqrt{11}\right|-5\left(\sqrt{11}+\sqrt{5}\right)\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$";

c) "$\left|\sqrt{7}-3{,}12\right|+\sqrt{7}+\sqrt{6}-\left|\sqrt{6}-2{,}13\right|\in\mathbb{Q}$";

d) "$\left(3\sqrt{2}-5\sqrt{3}\right)^2+\left(3+5\sqrt{6}\right)^2\in\mathbb{N}$".

46. Calculați media aritmetică a numerelor:

a) $a=\left(\sqrt{11}-3\right)\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{5}-\sqrt{4}\right)$ și $b=\left(\sqrt{11}+3\right)\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{5}+\sqrt{4}\right)$.

b) $a=\left(\sqrt{16}-\sqrt{15}\right)\left(\sqrt{25}-\sqrt{24}\right)$ și $b=\left(\sqrt{16}+\sqrt{15}\right)\left(\sqrt{25}-\sqrt{24}\right)$.

47. Calculați media geometrică a numerelor:

$a=\left(\sqrt{3}-1\right)\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{4}-\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{5}+\sqrt{4}\right)\cdot\ldots\cdot\left(\sqrt{21}+\sqrt{20}\right)$ și

$b=\left(\sqrt{3}+1\right)\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{4}+\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{5}-\sqrt{4}\right)\cdot\ldots\cdot\left(\sqrt{21}-\sqrt{20}\right)$.

48. Calculați: *a)* $\sqrt{7+\sqrt{7}}\cdot\sqrt{\sqrt{14}+\sqrt{7+\sqrt{7}}}\cdot\sqrt{\sqrt{14}-\sqrt{7+\sqrt{7}}}$;

b) $\sqrt{13+\sqrt{13}}\cdot\sqrt{\sqrt{26}+\sqrt{13+\sqrt{13}}}\cdot\sqrt{\sqrt{26}-\sqrt{13+\sqrt{13}}}$.

49. Arătați că: *a)* $3-2\sqrt{2}=\left(1-\sqrt{2}\right)^2$ și $11-6\sqrt{2}=\left(3-\sqrt{2}\right)^2$;

b) $\sqrt{11-6\sqrt{2}}+\sqrt{3-2\sqrt{2}}\in\mathbb{Q}$.

50. Comparați numerele a și b dacă:

$$a=\sqrt{\left(\sqrt{7}-\sqrt{5}\right)^2}+\sqrt{\left(\sqrt{5}-\sqrt{7}\right)^2}+2\sqrt{\left(\sqrt{7}+\sqrt{5}\right)^2}+4\left(\frac{3}{2}-\sqrt{7}\right)$$

și $b=\sqrt{8-2\sqrt{7}}+\sqrt{8+2\sqrt{7}}+2\sqrt{16-6\sqrt{7}}$.

51. Arătați că:

a) $\sqrt{10-2\sqrt{21}}-\sqrt{7}\in\mathbb{R}-\mathbb{Q}$; *b)* $\sqrt{3+\sqrt{13+4\sqrt{3}}}-\sqrt{3-\sqrt{13-4\sqrt{3}}}\in\mathbb{N}$.

52. Arătați că:

a) $\sqrt{15-4\sqrt{8+2\sqrt{7}}}-\sqrt{10+2\sqrt{8-2\sqrt{7}}}\in\mathbb{Z}-\mathbb{N}$;

b) $\sqrt{9+\sqrt{6}+\sqrt{10-4\sqrt{6}}}+\sqrt{5-\sqrt{316-120\sqrt{6}}}\in\mathbb{N}$.

Scanned with OKEN Scanner

53. Se consideră numerele reale x şi y. Ştiind că $y-x=2$, $y>2$, arătaţi că expresia $E(x;y)=\sqrt{x^2+y^2-4y+4}-\sqrt{x^2+y^2+2(x-y+1)}$ este constantă.

54. Determinaţi numerele reale x, y şi z care satisfac inegalitatea: $\sqrt{5x^2-20x+24}+\sqrt{y^2+14y+50}\le 10z-z^2-22$.

55. Catetele b şi c ale triunghiului dreptunghic ABC satisfac relaţia $\sqrt{b^2-10\sqrt{2}b+51}+\sqrt{c^2-2\sqrt{14}c+30}\le 5$. Calculaţi aria triunghiului.

56. Determinaţi numărul natural $\overline{xy}$ ştiind că: $\sqrt{\overline{xy}+\sqrt{\overline{yx}+4}}\in\mathbb{N}$.

57. Determinaţi $n\in\mathbb{N}$ astfel încât:

$$S=\frac{1}{\sqrt{3+2\sqrt{2}}}+\frac{1}{\sqrt{5+2\sqrt{6}}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{2n+1+2\sqrt{n(n+1)}}}=10.$$

58. Arătaţi că:

a) $1+3+5+\ldots+(2n-1)=n^2$;

b). $\sqrt{\sqrt{1}+\sqrt{1+3+5}+\sqrt{1+3+5+7}+\ldots+\sqrt{1+3+5+\ldots+2013}}\in\mathbb{N}$.

Probleme de şapte stele

59. Calculaţi $\sqrt{\frac{4}{3}+\frac{5}{6}+\frac{6}{9}+\frac{7}{12}+\ldots+\frac{78}{225}-\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{75}\right)}$.

60. Calculaţi $\sqrt{\left(\frac{8}{7}+\frac{9}{14}+\frac{10}{21}+\ldots+\frac{250}{2401}\right)-\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{343}\right)}$.

61. Calculaţi $\sqrt{\frac{1}{1\cdot 4}+\frac{1}{2\cdot 6}+\frac{1}{3\cdot 8}+\ldots+\frac{1}{48\cdot 98}+\frac{1}{49\cdot 100}}$.

62. Calculaţi $\sqrt{\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+\frac{1}{3\cdot 4\cdot 5}+\ldots+\frac{1}{48\cdot 49\cdot 50}}$.

63. *a)* Demonstraţi că $\sqrt{1+\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{n^2}}=\frac{n^2+n+1}{n(n+1)}$, oricare ar fi $n\in\mathbb{N}^*$.

b) Calculaţi suma:

$$S=\sqrt{1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}}+\ldots+\sqrt{1+\frac{1}{98^2}+\frac{1}{99^2}}.$$

Scanned with OKEN Scanner

1.6. Raționalizarea numitorilor

Raționalizarea numitorilor de forma $a\sqrt{b}$ sau $a\pm\sqrt{b}$, $a\in\mathbb{Z}^*$, $b\in\mathbb{N}^*$

Prin *raționalizarea* numitorului unui raport înțelegem eliminarea radicalului de la numitorul raportului respectiv, fără a modifica valoarea raportului.

1. Dacă $a,c\in\mathbb{R}^*$ și $b>0$, atunci $\frac{c}{a\sqrt{b}}=\frac{(\sqrt{b})c}{a\sqrt{b}}=\frac{c\sqrt{b}}{a\sqrt{b^2}}=\frac{c\sqrt{b}}{ab}$.

2. Dacă $a,c,d\in\mathbb{R}$ și $b>0$, atunci:

$$\frac{c}{a+\sqrt{b}}=\frac{(a-\sqrt{b})c}{a+\sqrt{b}}=\frac{c\left(a-\sqrt{b}\right)}{a^2-b},\text{ unde } a\neq-\sqrt{b};$$

$$\frac{d}{a-\sqrt{b}}=\frac{(a+\sqrt{b})d}{a-\sqrt{b}}=\frac{d\left(a+\sqrt{b}\right)}{a^2-b},\text{ unde } a\neq\sqrt{b}.$$

Observație. Expresiile de tipul $a+\sqrt{b}$ și $a-\sqrt{b}$ sunt reciproc *conjugate*.

---

*

1. Raționalizați numitorii următoarelor rapoarte:

a) $\frac{1}{\sqrt{5}}$; *b)* $\frac{11}{\sqrt{11}}$; *c)* $\frac{-2}{\sqrt{6}}$; *d)* $\frac{\sqrt{5}}{-\sqrt{7}}$;

e) $\frac{18}{\sqrt{6}}$; *f)* $\frac{-4}{\sqrt{20}}$; *g)* $\frac{100}{\sqrt{5}}$; *h)* $\frac{8}{\sqrt{10}}$;

i) $\frac{1}{2\sqrt{3}}$; *j)* $\frac{-3}{2\sqrt{6}}$; *k)* $\frac{2}{7\sqrt{22}}$; *l)* $\frac{a}{\sqrt{a^3}}$, $a>0$;

2. Determinați primele două zecimale exacte ale numerelor:

a) $\frac{1}{\sqrt{2}}$; *b)* $\frac{3}{\sqrt{7}}$; *c)* $\frac{6}{3\sqrt{5}}$; *d)* $\frac{2}{3\sqrt{3}}$.

3. Raționalizați numitorii următoarelor rapoarte:

a) $\frac{1}{2-\sqrt{3}}$; *b)* $\frac{3}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}$; *c)* $\frac{-2}{\sqrt{7}+\sqrt{3}}$; *d)* $\frac{11}{2+\sqrt{5}}$;

e) $\frac{-5}{4+\sqrt{11}}$; *f)* $\frac{18}{5-\sqrt{13}}$; *g)* $\frac{9}{\sqrt{21}-\sqrt{18}}$; *h)* $\frac{14}{\sqrt{24}+\sqrt{17}}$;

i) $\frac{-33}{8-\sqrt{20}}$; *j)* $\frac{4}{5+\sqrt{11}}$; *k)* $\frac{3}{6+\sqrt{33}}$; *l)* $\frac{8}{7-\sqrt{41}}$;

m) $\frac{-4}{\sqrt{73}+\sqrt{65}}$; *n)* $\frac{-2\sqrt{15}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$; *o)* $\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{12}-\sqrt{6}}$; *p)* $\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{14}-3}$.

Scanned with OKEN Scanner

4. Calculați:

a) $\frac{4}{\sqrt{7}}+\frac{1}{2\sqrt{7}}-\frac{3}{5\sqrt{7}}+\frac{9}{10\sqrt{7}}$; *b)* $\frac{2}{\sqrt{5}+\sqrt{7}}+\frac{3}{\sqrt{7}+\sqrt{10}}+\frac{4}{\sqrt{10}+\sqrt{14}}$;

c) $\frac{6}{\sqrt{6}+\sqrt{4}}-\frac{3}{\sqrt{5}+\sqrt{6}}+\frac{8}{\sqrt{5}+\sqrt{9}}$; *d)* $\frac{1}{\sqrt{2}-1}+\frac{1}{\sqrt{2}+1}-\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$.

5. Calculați:

a) $(-2)^{-1}+2^{-3}$; *b)* $\left(\sqrt{3}\right)^{-1}+\left(-\sqrt{3}\right)^{-3}$;

c) $\left(\sqrt{4}+\sqrt{5}\right)^{-1}+\left(\sqrt{5}+\sqrt{9}\right)^{-1}$; *d)* $\left(\sqrt{4}+\sqrt{7}\right)^{-1}+\left(\sqrt{7}+\sqrt{16}\right)^{-1}$.

6. Pentru numerele $a=4\sqrt{5}$ și $b=3\sqrt{5}$, calculați:

a) $\frac{a+b}{2}$; *b)* $\sqrt{ab}$; *c)* $\frac{2ab}{a+b}$; *d)* $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$.

**

7. Raționalizați numitorii:

a) $\frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$; *b)* $\frac{1-\sqrt{5}}{3\sqrt{5}}$; *c)* $\frac{\sqrt{22}-\sqrt{33}}{2\sqrt{11}}$; *d)* $\frac{\sqrt{80}-\sqrt{45}}{\sqrt{75}}$.

8. Raționalizați numitorii:

a) $\frac{4}{\sqrt{6}-2}$; *b)* $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{5}}{\sqrt{6}-\sqrt{5}}$; *c)* $\frac{1}{3\sqrt{2}-2\sqrt{5}}$; *d)* $\frac{\sqrt{30}-\sqrt{18}}{10-2\sqrt{15}}$.

9. Calculați:

a) $\frac{2\sqrt{3}}{3}-\frac{5}{\sqrt{3}}$; *b)* $(2\sqrt{6})^{-1}+\frac{2}{\sqrt{3}}$; *c)* $\left(\frac{4\sqrt{5}}{5}-\frac{3}{2\sqrt{5}}\right):\left(-\frac{\sqrt{20}}{3}\right)$;

d) $\frac{1}{3\sqrt{2}}+\frac{5\sqrt{2}}{\sqrt{6}}$; *e)* $\frac{\sqrt{30}}{2}\cdot\left(\sqrt{5}-\frac{3}{2\sqrt{5}}\right)$; *f)* $\left(1-\frac{4}{\sqrt{3}}\right):\frac{5}{3+4\sqrt{3}}$.

g) $\left(\frac{1}{\sqrt{17}}-2\sqrt{17}\right)\cdot\sqrt{17}-5\sqrt{63}:(-7)$; *h)* $-\left(\frac{6}{\sqrt{3}}-2\sqrt{3}\right)\cdot\frac{5}{\sqrt{3}}+\sqrt{81}$.

10. Calculați $\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}$, știind că:

a) $a=\sqrt{5}$ și $b=\sqrt{3}$; *b)* $a=2\sqrt{3}$ și $b=\sqrt{7}$; *c)* $\frac{a}{b}=\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{7}}$;

11. Calculați:

a) $\frac{2}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}-\frac{3}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\frac{4}{\sqrt{9}-\sqrt{5}}$;

Scanned with OKEN Scanner

b) $\left(\frac{4}{\sqrt{7}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{4}-\sqrt{3}}-\sqrt{7}\right)^{-2}+\frac{3}{4}-\frac{5}{3\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{5}}$.

12. Calculaţi media aritmetică a numerelor:

a) $13,\ \sqrt{7}+6$ şi $-1-\sqrt{7}$; *b)* $10+2\sqrt{5}, 3-4\sqrt{5}, 2\sqrt{5}-6\sqrt{7}$ şi $6\sqrt{7}+11$.

13. Media aritmetică numerelor a, b, şi c este egală cu $7\sqrt{3}$. Dacă $a=-4+6\sqrt{3}$ şi $b=14\sqrt{3}$, determinaţi numărul c şi media aritmetică a numerelor a şi b.

14. Calculaţi media geometrică a numerelor:

a) $\sqrt{14}$ şi $\sqrt{56}$; *b)* $13-\sqrt{69}$ şi $13+\sqrt{69}$;

c) $\frac{10\sqrt{2}-\sqrt{7}}{8}$ şi $\frac{\sqrt{200}+\sqrt{7}}{2}$; *d)* $5\sqrt{2}+3\sqrt{18}-2\sqrt{50}$ şi $\frac{6\sqrt{2}}{3}+\frac{\sqrt{98}}{5}$.

15. Media geometrică a numerelor a şi b este egală cu $4\sqrt{5}$. Dacă $a=7-3\sqrt{5}$, determinaţi numărul b şi media aritmetică a numerelor a şi b.

16. Determinaţi numărul real x din:

a) $(15-x)\cdot\sqrt{11}=3\sqrt{44}+8\sqrt{99}$; *b)* $\frac{\sqrt{18}+\sqrt{50}}{x}=\frac{7}{\sqrt{2}}+\frac{2}{\sqrt{8}}-\frac{4\sqrt{5}-\sqrt{20}}{\sqrt{10}}$;

c) $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{7}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}-\sqrt{3}x=5+\frac{\sqrt{3}}{7}$; *d)* $\sqrt{6}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+3\sqrt{3}=x-\sqrt{50}+6$.

17. Stabiliţi valoarea de adevăr a propoziţiilor:

a) "Numărul $a=3\cdot(4\sqrt{2}-2\sqrt{3})-\left(\frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\cdot\sqrt{12}$ **nu** este număr natural".

b) "Numărul $b=\left(\frac{1}{\sqrt{99}}-\frac{1}{\sqrt{44}}+\frac{1}{\sqrt{176}}\right):(-\sqrt{275})^{-1}$ este număr întreg".

c) "$\sqrt{\frac{\sqrt{5}-2}{\sqrt{5}+2}}-\sqrt{\frac{\sqrt{5}+2}{\sqrt{5}-2}}=-4$";

18. Calculaţi: *a)* $\left(\sqrt{\sqrt{2}+1}-\sqrt{\sqrt{2}-1}\right)^2+\left(\sqrt{3+\sqrt{5}}+\sqrt{3-\sqrt{5}}\right)^2$;

b) $\frac{1}{2+\sqrt{2}}+\frac{1}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}+\frac{1}{4\sqrt{3}+3\sqrt{4}}$.

19. *a)* Calculaţi $(2\sqrt{7}-3\sqrt{3})^2-(3\sqrt{3}-2\sqrt{5})^2$;

b) Determinaţi $a,b\in\mathbb{Z}$ cu proprietatea: $a\sqrt{5}-b\sqrt{7}=\sqrt{55-12\sqrt{21}}-\sqrt{47-12\sqrt{15}}$.

Scanned with OKEN Scanner

***

20. Calculaţi:

a) $\frac{2\sqrt{2}+3\sqrt{3}}{5}+\frac{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}}{4}-\frac{13\sqrt{2}-7\sqrt{3}}{10}$;

b) $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\sqrt{3}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\sqrt{3}\right)+\left(\frac{1}{\sqrt{3}}+\sqrt{2}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{3}}-\sqrt{2}\right)-\frac{5}{6}$;

c) $\sqrt{(\sqrt{3}-\sqrt{5})^2}+\sqrt{(2-\sqrt{3})^2}-(2\sqrt{3}+\sqrt{5})$; *d)* $(5+2\sqrt{6})^{20}\cdot(5-2\sqrt{6})^{20}$;

e) $\frac{\sqrt{7}+\sqrt{5}}{\sqrt{7}-\sqrt{5}}-\sqrt{35}+\frac{1-\frac{5}{6}}{1+\frac{5}{6}}\cdot 33$; *f)* $\sqrt{\frac{1}{2}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}\cdot\sqrt{\frac{3^8\cdot 2^6}{5^{16}}}}}$; *g)* $\frac{1}{\sqrt{5}-1}-\frac{1}{\sqrt{5}+1}$.

21. Calculaţi valorile $a\cdot b$; $a:b$; $(a-b)^b$, unde a şi b sunt numere reale date prin:

$$a=\sqrt{24}\cdot\sqrt{3+\sqrt{3}}\cdot\sqrt{3+\sqrt{6+\sqrt{3}}}\cdot\sqrt{3-\sqrt{6+\sqrt{3}}}$$

şi $b=(5\sqrt{8}+\sqrt{20}-3\sqrt{28}):(\sqrt{50}+\sqrt{5}-\sqrt{63})$.

22. Arătaţi că, pentru oricare număr real a, $a>0$, valoarea expresiei $E=\frac{\sqrt{3a+1+\sqrt{6a+1}}}{2}-\frac{1+\sqrt{6a+1}}{2\sqrt{2}}$ este constantă.

23. Aflaţi numerele $a\in\mathbb{Z}$ pentru care $\frac{\sqrt{19+8\sqrt{3}}-\sqrt{8+2\sqrt{15}}+\sqrt{6-2\sqrt{5}}}{a-2}\in\mathbb{Z}$.

Probleme de şapte stele

24. Calculaţi suma $S=\frac{1}{\sqrt{3+2\sqrt{2}}}+\frac{1}{\sqrt{5+2\sqrt{6}}}+\frac{1}{\sqrt{7+2\sqrt{12}}}+\frac{1}{\sqrt{9+2\sqrt{4\cdot 5}}}$.

25. Determinaţi $n\in\mathbb{N}^*$ astfel încât să aibă loc egalitatea:

$$\frac{1}{\sqrt{2}+1}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}=40.$$

26. Fie $n\geq 1$ un număr natural. Calculaţi sumele:

a) $S=\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{1\cdot 2}}+\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{2\cdot 3}}+\frac{\sqrt{4}-\sqrt{3}}{\sqrt{3\cdot 4}}+\ldots+\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n(n+1)}}$;

b) $S=\frac{1}{1+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{5}}+\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{7}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{2n-1}+\sqrt{2n+1}}$;

c) $S=\frac{1}{1\cdot\sqrt{2}+2\cdot\sqrt{1}}+\frac{1}{2\sqrt{3}+3\sqrt{2}}+\frac{1}{3\sqrt{4}+4\sqrt{5}}+\ldots+\frac{1}{n\sqrt{n+1}+(n+1)\sqrt{n}}$;

Scanned with OKEN Scanner

TESTE DE EVALUARE

Testul 1

1. **(1p)** Scrieți numerele iraționale din mulțimea:
$A=\left\{17;\ -\frac{3}{5};\ \sqrt{3};\ 5+\sqrt{4};\ \pi;\ 1-\sqrt{2};\ 3,(4)\right\}$.
2. **(1p)** Calculați media aritmetică a numerelor: $2\sqrt{3}$ și $6-2\sqrt{3}$.
3. **(1p)** Scrieți inversul numărului $-\frac{7}{3}$.
4. **(1p)** Arătați că $\left|7-\sqrt{50}\right|-\sqrt{50}+91\in\mathbb{N}$.
5. **(1p)** Rezolvați în $\mathbb{R}$ inecuația $|5x-1|\le 9$.
6. **(1p)** Calculați: $(5^4)^{10}:\left[(-5)^2\right]^{19}-\frac{3}{14}\cdot\left(-\frac{7}{9}\right)-\left(\frac{6}{55}\right)^{-1}$.
7. **(1p)** Stabiliți valoarea de adevăr a propoziției:
a) $5\in[3,7]\cap\mathbb{N}$; *b)* $3\notin(-2,1)\cap(3,7]$; *c)* $[-2,5]\subset(0,10)$.
8. **(1p)** Comparați numerele $5+2\sqrt{3}$ și $5+3\sqrt{2}$.
9. **(1p)** Stabiliți dacă numărul $3,5-\left|\sqrt{3}-4\right|-\sqrt{3}$ este rațional.

NOTĂ: Timp de lucru 45 minute. Se acordă 1 punct din oficiu.

Testul 2

1. **(1p)** Determinați primele două zecimale ale numărului $\sqrt{31}$.
2. **(1p)** Scrieți opusul numărului $5-\sqrt{7}$.
3. **(1p)** Introduceți factorul sub radical: $5\sqrt{2}$.
4. **(1p)** Calculați: $(3^7)^2:(3^4)^3+\left(-\frac{9}{7}\right):\left(-\frac{3}{35}\right)$.
5. **(1p)** Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația: $\sqrt{(2x+3)^2}=11$.
6. **(1p)** Efectuați:
a) $(-\infty;\ 7]\cap(-2,10]$; *b)* $[-4,4)\cup[0,8]$; *c)* $[-7;3]\setminus[2;11]$.
7. **(1p)** Calculați: $\sqrt{\frac{15^2+20^2}{30^2-18^2}}+\sqrt{18^2+24^2}$.
8. **(1p)** Calculați media aritmetică și media geometrică a numerelor:
$a=7-\sqrt{13}$ și $b=7+\sqrt{13}$.
9. **(1p)** Calculați: $2,4(5)+0,04\cdot10^2-(-2)^{-2}+\left|\sqrt{6}-5\right|+\frac{1}{1-\sqrt{6}}$.

NOTĂ: Timp de lucru 45 minute. Se acordă 1 punct din oficiu.

Scanned with OKEN Scanner

Testul 3

1. **(1p)** Scrieți conjugatul numărului $3-\sqrt{7}$.
2. **(1p)** Calculați media geometrică a numerelor $6+\sqrt{11}$ și $6-\sqrt{11}$.
3. **(1p)** Scoateți factorii de sub radical: $\sqrt{5^2\cdot 2^4\cdot 3}$.
4. **(1p)** Calculați: $\left(\sqrt{2}+\sqrt{50}-\sqrt{72}\right)\cdot\sqrt{2}+\frac{8}{21}:\left(-\frac{4}{63}\right)$.
5. **(1p)** Rezolvați ecuația: $\sqrt{(4-3x)^2}=24$.
6. **(1p)** Calculați:
7. *a)* $[-2,3]\cup[0,7)$; *b)* $(-3,5]\cap\mathbb{Z}^*$; *c)* $\{-2,-1,0,1,2,3\}\setminus[1;8]$.
8. **(1p)** Determinați cel mai mic număr întreg din mulțimea $A=\{x\in\mathbb{Z}\,|\,16<x^2<100\}$.
9. **(1p)** Calculați: $2^{-3}+0,3(6)\cdot 10-|3-\sqrt{5}|-\sqrt{5}+11$.
10. **(1p)** Fie numărul $a=13548,4(28)$. Rotunjiți numărul la ordinul:
    a) sutimilor; *b)* miilor; *c)* zecimilor de miimi.

NOTĂ: Timp de lucru 45 minute. Se acordă 1 punct din oficiu.

Testul 4

1. **(1p)** Fie numărul $a=17+x\sqrt{3}$. Pentru ce valoare reală a lui x numărul a este rațional ?
2. **(1p)** Scrieți numărul $\frac{17}{6}$ sub formă de fracție zecimală.
3. **(1p)** Calculați: $7\sqrt{2}+5\sqrt{2}-20\sqrt{2}$.
4. **(1p)** Calculați: $(-2)^4+\left(-\frac{3}{5}\right):(5)^{-1}$.
5. **(1p)** Precizați care dintre numerele de mai jos sunt raționale:
   $-3;\ -\sqrt{3};\ 3^3;\ \sqrt{3^3};\ 3^{-1};\ \sqrt{3^4};\ \frac{3}{\sqrt{33}};\ \left(-\sqrt{3}\right)^{-2}$.
6. **(1p)** Rezolvați în $\mathbb{R}$ inecuația: $|4x+3|<15$.
7. **(1p)** Stabiliți valoarea de adevăr a propozițiilor:
   a) $3\notin(-4;4)$; *b)* $[-2,3)\cap(-1,7]=(-1,3)$;
   c) $(-3,3)\cup\{-3,-2,-1,0,1,2,3\}=[-3,3]$.
8. **(1p)** Comparați numerele a și b, dacă:
   $a=\sqrt{2}\left(\sqrt{2}+\sqrt{18}+3\right)$ și $b=\sqrt{5}\left(\sqrt{5}+\sqrt{20}+2\right)-7$.
9. **(1p)** Calculați: $3,2(5)+\frac{1}{3}:0,1-|5-\sqrt{7}|-\sqrt{7}$.

NOTĂ: Timp de lucru 45 minute. Se acordă 1 punct din oficiu.

Scanned with OKEN Scanner

Fișă pentru portofoliul individual

Numele și prenumele: _____

Clasa a VIII-a ____ **A2**

Tema nr. I.2: Operații cu numere reale. Raționalizarea numitorilor

(1,5p) 1. Completați spațiile punctate astfel încât să obțineți afirmații adevărate:

a) Media geometrică a numerelor 25 și 4 este egală cu .....

b) Rezultatul calculului $3\sqrt{3}-\sqrt{27}$ este egal cu ....

c) Un sfert din 2^{10} este egal cu ....

(1,5p) 2. Pentru fiecare dintre enunțurile următoare, dacă enunțul este adevărat, încercuiți litera „A", în caz contrar încercuiți litera „F":

a) $2\sqrt{5}+3\sqrt{5}=8\sqrt{8}$. A F

b) Raționalizând $\frac{3}{\sqrt{3}}$ se obține $\sqrt{3}$. A F

c) Media aritmetică a numerelor $\sqrt{2}+1$ și $\sqrt{2}-1$ este egală cu $\sqrt{2}$. A F

(2p) 3. Încercuiți răspunsul corect la fiecare dintre următoarele exerciții. Dintre cele patru variante de răspuns, scrise la fiecare cerință, doar una este corectă.

a) Calculând $\frac{2}{3}:2^2+\frac{5}{6}$ se obține:

A. 1,5 **B.** 3,5 **C.** 1 **D.** 2

b) Calculând $|2-\sqrt{5}|-(2+\sqrt{5})$ se obține:

A. $-2\sqrt{5}$ **B.** 0 **C.** $-4+2\sqrt{5}$ **D.** -4

c) Calculând $\frac{1}{2+\sqrt{5}}+\frac{1}{2-\sqrt{5}}$ se obține:

A. 4 **B.** -4 **C.** $2\sqrt{5}$ **D.** $-2\sqrt{5}$

d) Media geometrică a numerelor $a=\sqrt{(1+\sqrt{2})^2}$ și $b=|1-\sqrt{2}|$ este egală cu:

A. $1+\sqrt{2}$ **B.** 1 **C.** $\sqrt{3}$ **D.** $\sqrt{2}$

Scanned with OKEN Scanner

La următoarele subiecte scrieți pe fișa de evaluare rezolvările complete.

(2p) 4. Fie numărul $A=4^n\cdot 5^{2n+1}-2^{2n}\cdot 25^n$, unde $n\in\mathbb{N}$.

a) Arătați că numărul natural A este pătrat perfect.

b) Determinați valoarea numărului n pentru care $\sqrt{A}$ nu se divide cu 10.

(2p) 5. ***a)*** Scrieți numerele de forma $\overline{xy}$, în baza zece, care sunt pătrate perfecte.

b) Calculați cel mai mic număr de forma $\overline{ab}$, scris în baza zece, pentru care $\sqrt{\overline{ab}+\overline{ba}}$ este un număr natural.

NOTĂ: Timp de lucru 50 minute. Se acordă un punct din oficiu.

Scanned with OKEN Scanner

1.7. Calcul cu numere reprezentate prin litere: adunarea, scăderea, înmulțirea, împărțirea, ridicarea la putere cu exponent număr întreg

Expresii algebrice. O expresie sub forma unui *produs* în care factorii sunt numere sau litere este ***expresie algebrică***. Literele care apar în expresie semnifică numere reale neprecizate.

În general, o astfel de expresie se poate scrie $E = c \cdot l$, unde c este un număr real numit *coeficient*, iar l este *partea literală*.

Exemplu: În expresia $2ax^2z$, coeficientul este 2, iar partea literală este ax^2z.

Termeni asemenea. Operații cu expresii algebrice.

Doi termeni ai unei expresii algebrice sunt *asemenea* dacă au aceeași parte literală. Termenii asemenea *se adună* (*se reduc*) pe baza proprietății de distributivitate a înmulțirii numerelor reale în raport cu adunarea/ scăderea.

Exemple. 1. $8x^2 - 3x^2 = (8-3) \cdot x^2 = 5x^2$;

2. $a - 7 + 2x^2 - 9a + 20 + 5x^2 = (-7+20) + (1-9)a + (2+5)x^2 = 13 - 8a + 7x^2$.

Folosind proprietățile operațiilor cu numere reale, se desprind următoarele:

- suma a două expresii algebrice este o expresie algebrică;
- produsul a două expresii algebrice este o expresie algebrică;
- dacă $E \neq 0$ este expresie algebrică, atunci E^{-1} este expresie algebrică.

În concluzie: cu expresiile algebrice se pot efectua aceleași operații care se efectuează cu numere: adunarea, scăderea, înmulțirea, împărțirea, ridicarea la putere. Aceste operații au aceleași proprietăți ca și operațiile cu numere reale.

1.7.1. Adunarea și scăderea

*

1. Efectuați:

a) $3x - 3x$; *b)* $6x - 5x$; *c)* $-8ax + 7ax$; *d)* $5xc - 2cx$;

e) $4x^2 - x^2$; *f)* $-14y^3 + y^3$; *g)* $11ab^2 - 11b^2a$; *h)* $12abc - 13abc$.

2. Reduceți termenii asemenea:

a) $2x - 3 + 5x$; *b)* $7 + a - 10 - 8a$; *c)* $8x - 5 + 10x - 3 - 4x$;

d) $13 + x^2 - 6 + 5x^2$; *e)* $5x - 5x + 12$; *f)* $4a - 5x + 2a + 5x - 3a$;

3. Desfaceți parantezele și reduceți termenii asemenea:

a) $(2x-3) + (6x-10) + (13-7x)$; *b)* $-12 - (4x^2+3) - x^2$;

c) $18 - (7x-5) + (23x-21)$; *d)* $(-5 + a - 2x) - (6x + 20 - 5a)$;

e) $(5x + 7 - 21x^2) + (40x^2 - 17x + 3)$; *f)* $(8 - 3x^2 + ax) - (5 + 4ax - 3x^2)$;

g) $11 - (4x^2 - 3) + (8a + 5x^2) - (5a - 9)$; *h)* $(4x^2 - 8x) - (3x^2 - 5x)$.

Scanned with OKEN Scanner

4. Efectuați:

a) $(3x^2-2x+1)-(-x^2+4x-5)$;

b) $(4x^3-12x^2+5x-7)-(3x^3-8x^2+2x-4)$;

c) $20x^2-(-5x^2+4x-18)-(6-3x)-(2x^2+6x-11)$;

d) $7x+(-3x+2y)-5x+(10x-2y)$;

e) $(-4a+3b-10c)-(11-2a-4b)+(6a+14c-20b)$;

f) $(m+n+p)-(m-n-p)+(-m-n+p)-3p$.

5. Efectuați:

a) $7x-\left[5y-(3x-2y-5)\right]+7-10x+9y$;

b) $13y+\left\{-4x-\left[5xy+2y-(7x-13+10y)\right]\right\}$;

c) $11+\left[2x+(x^2-7)-(5x-3)\right]-(18-3x^2+4x)$;

d) $23-\left[17-(3x+a)\right]+\left[(4x+5)-(3x-2a)+9\right]$;

e) $x^2-(2+3x)-\left[7-(11x^2-5x)\right]+18+6x^2$.

**

6. Efectuați:

a) $-\frac{2}{5}x+\frac{12}{5}x$; *b)* $\frac{2}{5}n-\frac{7}{5}n$; *c)* $\frac{x}{7}-\frac{11x}{7}-\frac{11x}{7}$;

d) $2,3m+7,7m$; *e)* $1,7m^2x-3,7m^2x$; *f)* $0,085am+0,915ma$;

g) $2\sqrt{3}x+8\sqrt{3}x$; *h)* $x\sqrt{12}-x\sqrt{27}$; *i)* $-2a\sqrt{18}+3a\sqrt{8}$.

7. Efectuați:

a) $31x^2-9+4x^2-3^2$; *b)* $4x^2-2\sqrt{5}-4x^2$;

c) $3\sqrt{2}-4x+5\sqrt{2}+4x$; *d)* $5\sqrt{2}-23a^2-2\sqrt{2}+17a^2-3\sqrt{2}$;

e) $12-3x^2+ax-7+x^2+5ax+9+6x^2$;

f) $a+x-x^2+3a-5a+4x^2+7a-6x+x^2$;

g) $100+(a^2b-3b^2)+49+8b^2-(a^2b-10b^2)$.

8. Efectuați, reducând termenii asemenea:

a) $(12x^2-3)+(8a+5x^2)-(5a-10)$;

b) $20a-(-3x+5)+(12a-7x)-(22-15a)+28$;

c) $(x+2x^2-3)-(-4-5x^2+8x)+(7x+10-9x^2)$;

d) $(13x+5y\sqrt{2}+\sqrt{11})-7x-(y\sqrt{8}+\sqrt{44})$;

e) $(0,7a-2,4b-0,3)-(-0,3a+1,6b-0,3)$;

Scanned with OKEN Scanner

f) $13x^2+\left(5-2{,}6x-\frac{2}{5}x^2\right)+\left(1-7{,}4x+\frac{17}{5}x^2\right)$;

g) $4a-13m-(8a-12m)+m-(2a-17)+15-4a-10m$;

h) $x^4-12x^2+7x-13-(x^3+5x-20)+(13+12x^2-x^4+3x^3)$.

9. Efectuați:

a) $8x-\{-2x^2+3x-[17-(4x^2-5x+10)]\}$;

b) $13x^2-(6x-5x^2)-\{[3-11x-(2-5x^2-7x)]\}$;

c) $2{,}5x-\left[4{,}4x^2+(5{,}1-3{,}7x)-(4{,}1-2{,}8x)\right]$;

d) $\frac{3x}{5}+\left\{\frac{y}{4}-\left[\frac{8}{3}-\left(\frac{3y}{4}-\frac{1}{3}\right)+\frac{2x}{5}\right]\right\}-10x+7$.

10. Efectuați:

a) $(7x-6y)-5x-\sqrt{3}(2\sqrt{3}\,x-4\sqrt{3}\,y)+[-x+(y+x)+7y]$;

b) $\sqrt{8}(3\sqrt{2}\,x-\sqrt{8})+\sqrt{2}(5\sqrt{8}-\sqrt{98}\,x)-\sqrt{6}(\sqrt{6}\,x-\sqrt{24})$;

c) $5x(\sqrt{18}-\sqrt{12})-3x(\sqrt{27}-\sqrt{50})+2x(\sqrt{8}-\sqrt{75})$;

d) $2x^2(\sqrt{108}-\sqrt{12})-5(\sqrt{147}-\sqrt{300})x^2+x^2(\sqrt{243}-\sqrt{48})$;

e) $\sqrt{18}(7\sqrt{2}-2x)+\sqrt{2}(5\sqrt{8}+4x)-\sqrt{6}(\sqrt{24}-\sqrt{363x})$.

***

11. Dacă $A=5x-4$, $B=-3x+6$, $C=-y+2x+7$ și $D=-4x+y-2$, calculați:

a) $A+B$; *b)* $A+C-B$; *c)* $A-B+C-D$; *d)* $A+D+(C-B)$.

12. Pentru $a=0{,}5$ și $b+c=-1{,}5$, calculați:

a) $a+b+c$; *b)* $a-b-c$; *c)* $4a-b-c$; *d)* $5a-7b-7c$.

e) $13a+10b+10c$; *f)* $4a^2-16(b+c)^2$; *g)* $5\cdot a^{-1}+(a+b+c)^{2011}$.

13. *a)* Dacă $a=-5$ și $b+c=11$, calculați $3a+b\sqrt{2}+c\sqrt{2}$.

b) Dacă $a+b=7$ și $b+c=-3$, calculați $2a+5b+3c$.

c) Dacă $3a+2b-c=10$ și $5a+7b+6c=23$, calculați $8a+9b+5c$.

d) Dacă $4m-3n-5=0$ calculați $(11-8m+6n)^{100}$.

14. Perimetrul unui patrulater este egal cu $8a+3b$, unde $a>2b>0$. O latură are lungimea $a+2b$, a doua este cu $2a-3b$ mai mare, iar următoarea cu $2a-4b$ mai mică decât a doua. Arătați că patrulaterul are două laturi cu lungimi egale.

Scanned with OKEN Scanner

1.7.2. Înmulțirea, împărțirea, ridicarea la putere cu exponent întreg

*

1. Efectuați:

a) $3x\cdot(-6)$; *b)* $(-5x)\cdot(-2x)$; *c)* $(-x^2)\cdot(+2x)$; *d)* $(-2x^2)\cdot(-3x^3)$;

e) $(-4x)\cdot 2y$; *f)* $16xy^3\cdot(2xy)$; *g)* $(-7x^2)\cdot(3y)$; *h)* $(-xy^2)\cdot(x^2y^2)$.

2. Efectuați (literele care apar în expresii reprezintă numere reale nenule):

a) $6x:(-6)$; *b)* $(4x^2):(-2x)$ *c)* $(-x):(+x)$; *d)* $4x^2y:(2x)$;

e) $-x^2y:(3xy)$; *f)* $9a^2b:(-3a^2)$; *g)* $x^2y^3:(-x^2y)$; *h)* $x^3y^2z:(x^2yz)$

3. Efectuați:

a) $(-x)^2$; *b)* $(-2ax^2)^3$; *c)* $(3x^2y)^2$; *d)* $(-ab^2c^3)^7$;

e) $(-x^2yz^3)^{10}$; *f)* $(-\sqrt{3}xy^2)^4$; *g)* $(-2ab^3)^4$; *h)* $(-2\sqrt{2}a^4b^3c)^3$.

4. Efectuați:

a) $(-3a^2b)\cdot(-5abc)$; *b)* $-6x^3yz^2\cdot(-2ax^2y)$; *c)* $\sqrt{3}\,xy^2\cdot(\sqrt{3}\,x^3yz)$;

d) $13xy^2\cdot(-2x^3y)$; *e)* $x^2y\cdot(x^2y)\cdot(-2x^2y)$; *f)* $-ab^2\cdot(-ab)\cdot(5a^2b)$;

5. Efectuați:

a) $2x\cdot(5-x)$; *b)* $-2x^2\cdot(4x-5)$; *c)* $-2x\cdot(x^2-3x+1)$;

d) $5xy^2\cdot(2x+3y)$; *e)* $-7xy^2\cdot(-1+x-2y^2)$; *f)* $(3a^2b)\cdot(a^2-b+2)$.

6. Efectuați, $x\neq 0$:

a) $5(x+1)-5$; *b)* $2x(a+b)-x(a-b)$; *c)* $(x+2)(x-1)-x^2$;

d) $(-x)^2-2x(x-1)$; *e)* $(4x^2+3x):x-2x$; *f)* $(21x^3-7x^2):(-7x)$;

g) $(a^3)^2-(a^2)^3$; *h)* $(x^3)^2:x^4-x(x-3)-3x$; *i)* $(-3x)^2-2x(3x-1)$.

**

7. Știind că $abxy\neq 0$, efectuați:

a) $2a^2\cdot(3ab):(6a^2b)$; *b)* $(-13a^5b^4):(-13a^5)\cdot(2ab)$;

c) $(-2x)\cdot(-2x^2)\cdot(-10x^3):(-20x^5)$; *d)* $\sqrt{3}\,x^2\cdot(-2x^3y^2):(\sqrt{3}x^4y^2)$;

Scanned with OKEN Scanner

e) $\frac{5}{7}x\cdot\left(\frac{21}{20}x^2y\right):\left(-\frac{3}{4}x^3y\right)$; f) $\left(-\frac{2}{3}ab^3c^5\right)^4$;

g) $\left(\frac{3}{2}ab^2\right)^{-1}:\left(\frac{3}{10}a^2b^{-3}\right)^{-1}$; h) $\left\{\left[6a^3b^3:\left(-3a^2b^2\right)\right]^2\right\}^{-1}$.

8. Fie a, x, y, z numere reale nenule. Efectuați:

a) $-4x\cdot\left(\frac{3}{4}y\right)$; b) $\left(-\frac{3}{7}x\right)\cdot\left(14x^3-7x\right)$; c) $\left(-\frac{3}{5}x\right)\cdot\left(2\frac{1}{2}xy\right)$;

d) $11x^2\cdot\left(\frac{7}{11}xy\right)$; e) $\left(-\frac{\sqrt{5}}{3}\right)\cdot\left(3a^2\sqrt{5}-6a\sqrt{5}\right)$; f) $\left(\frac{5}{4}x-\frac{3}{2}y\right)\cdot\left(-4xy^3\right)$;

g) $\left(\frac{15}{11}x^2y^3z-\frac{5}{11}x^3y^2z\right):\left(-\frac{5}{11}x^2y^2z\right)$; h) $\left(\frac{4}{7}x^3-\frac{5}{14}x^2-\frac{2}{21}x\right):\left(-\frac{x}{7}\right)$;

i) $\left(-2{,}5x^5-1{,}5x^3\right):\left(-0{,}5x^2\right)$; j) $\left(12\sqrt{3}\,a^4-6\sqrt{3}\,a^5\right):\left(-6\sqrt{3}\,a^3\right)$.

9. Efectuați (literele care apar în expresii reprezintă numere reale nenule):

a) $\left(12a^2-8a\right):(4a)$; b) $\left(15x^3y-10x^2y^2-5x^2y\right):\left(5x^2y\right)$;

c) $\left(32a^4b^3c^2-16a^3b^3\right):\left(8a^3b^3\right)$; d) $\left(20m^2n+15m^3n^2\right):\left(-5m^2n\right)$;

e) $\left(-13a+26a^2-39a^3\right):(-13a)$; f) $(70-10x+40y):(-10)$.

10. Efectuați:

a) $(-2x)^4:\left(4x^3\right)+(x-1)\cdot(2x+3)$; $x\neq 0$;

b) $\left[(-x)^3\right]^5:(-x)^{12}+\frac{3}{5}x^4y:\left(-\frac{1}{5}x^2y\right)+\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}$; $xy\neq 0$;

c) $\left[(-2x)^4-2^4x^4\right]:\left(0{,}05(36)xy^2\right)^3$; $xy\neq 0$;

d) $\left(-24x^3y-8x^3y^4\right):\left(-8x^2y\right)-3x$; $xy\neq 0$.

11. Efectuați:

a) $\left[(x-3y)^{m+2}-7(x-3y)^{m+1}+12y(x-3y)^m\right]:(x-3y)^m$, $m\in\mathbb{Z}$; $x\neq 3y$;

b) $\left(\frac{\sqrt{11}}{\sqrt{13}-\sqrt{11}}x+\frac{\sqrt{13}}{\sqrt{13}-\sqrt{11}}x\right)\cdot\left[\left(\sqrt{13}-\sqrt{11}\right)x^3\right]^2$;

c) $\frac{1}{2-\sqrt{3}}x^2-3+\left[\frac{1}{2+\sqrt{3}}\cdot x^2+3(1-x)\right]$;

d) $\left[\left(\sqrt{23}x-\sqrt{21}\right)\cdot\left(\sqrt{23}x+\sqrt{21}\right)\right]^{40}:\left[\left(23x^2-21\right)^8\right]^5$; $x\in\mathbb{Q}$.

12. Calculați:

a) $(x-3y)^{13}+(-x+3y)^{13}$; b) $(4x-2y-5)^{30}-(2y+5-4x)^{30}$;

c) $(m-5n)^{80}-(-m+5n)^{80}$; d) $\left(3x^2-9x+12\right)^{2007}+27^{669}\cdot\left(3x-x^2-4\right)^{2007}$.

Scanned with OKEN Scanner

13. Știind că $2a-3b+5=0$, calculați suma:

$$S=(4+2a-3b)+(4+2a-3b)^2+(4+2a-3b)^3+\ldots+(4+2a-3b)^{2010}.$$

14. Desfaceți parantezele și reduceți termenii asemenea:

a) $(3a^2b+6ab^2)(2a^2b+8ab^2)-(4a^2b-5ab^2)(3a^2b-7ab^2)$;

b) $(5a-2)(-3a^2+a-3)-(3a^2-2a-2)(4a^2+2a+3)$;

c) $(a^2-3b)(a^4+3a^2b+9b^2)-a^2(a-b)-9b^2(a-3b)$;

d) $\left[9a^2b^3(8a^2-4ab-4b^2)-12a^3b^2(2a^2+6ab-3b^2)\right]:(-12a^2b^2)$, $a,b\neq 0$.

***

15. Fie a un număr real cu proprietatea că numerele a^7 și a^{13} sunt raționale. Demonstrați că $a\in\mathbb{Q}$.

16. Aria unui dreptunghi este $3a^2b(a+2b)$, unde $a,b>0$, iar lungimea dreptunghiului este $a(a+2b)$. Aflați perimetrul dreptunghiului.

17. Calculați aria unui pătrat care are perimetrul egal cu $4a(a+b)$, unde $a,b>0$.

18. Calculați aria unui triunghi care are baza egală cu $4ab(2+3a)$ și înălțimea de $b(2-3a)$, unde $a,b\in\mathbb{R}$, astfel încât $0<a<\frac{2}{3}$, $b>0$.

19. Un trapez are baza mare egală cu $2a+c$, baza mică egală cu $2b+c$, iar înălțimea egală cu $a+b+c$, unde $a,b,c>0$. Exprimați aria trapezului.

20. Un triunghi isoscel are perimetrul egal cu $12x-7$, iar baza egală cu $4x+3$, unde x reprezintă un număr natural nenul.

a) Exprimați lungimile celorlalte laturi ale triunghiului.

b) Demonstrați că $x>3$.

Probleme de șapte stele

21. *a)* Efectuați: $1+a+a^2+a^3+a^4-a\left(1+a+a^2+a^3+a^4\right)$, $a\in\mathbb{R}$.

b) Fie n un număr natural nenul și $a\neq 1$ un număr real. Considerăm sumele: $S=1+a+\ldots+a^n$ și $S'=1+2a+3a^2\ldots+na^{n-1}$. Arătați că:

i) $S=\frac{a^{n+1}-1}{a-1}$; *ii)* $S'=\frac{na^{n+1}-(n+1)a^n+1}{(a-1)^2}$

c) Utilizând eventual formula găsită pentru S, deduceți egalitatea:

$$x^n-y^n=(x-y)\left(x^{n-1}+x^{n-2}y+x^{n-3}y^2+\ldots+xy^{n-2}+y^{n-1}\right)$$

22. *a)* Determinați numerele întregi a și b astfel încât $\left(\sqrt{2}+1\right)^{-2}=a+b\cdot\sqrt{2}$;

b) Arătați că $\left(3-2\sqrt{2}\right)^5<0{,}001$

23. Fie a, b și c trei numere reale cu proprietatea că $2a+b+c=0$. Arătați că

a) $a^2+ab+ac\leq 0$; *b)* $b^2-4ac\geq 0$.

Scanned with OKEN Scanner

1.8. Formule de calcul prescurtat

1. $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$

2.a. $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ 2.b. $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$

3.a. $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$ 3.b. $(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$

4.a. $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$ 4.b. $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

5. $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ac$

6. $(x+a)(x+b)=x^2+x(a+b)+ab$

---

*

1. Efectuați:

a) $(1+x)^2$; *b)* $(3-x)^2$; *c)* $(ax+x^2)^2$; *d)* $(2a-3y^2)^2$;

e) $(4x^2+5xy)^2$; *f)* $\left(\frac{3}{2}a^2+x^3\right)^2$; *g)* $(0,2x-5ay)^2$; *h)* $\left(3x+\sqrt{2}\right)^2$.

2. Completați spațiile punctate cu expresiile corespunzătoare obținerii unor afirmații adevărate:

a) $4x^2+...+1=(2x+1)^2$; *b)* $9-...+a^2=(3-a)^2$;

c) $25+10x+...=(5+x)^2$; *d)* $...+6x^2a+9a^2=(x^2+3a)^2$;

e) $49x^2-...+...=(7x-5)^2$; *f)* $100+60x+...=(10+3x)^2$.

3. Calculați rapid:

a) 103^2; *b)* 99^2; *c)* 201^2; *d)* 49^2;

Rezolvare. *c)* $201^2=(200+1)^2=200^2+2\cdot200+1^2=40000+400+1=40401$.

4. Efectuați:

a) $(7-a)\cdot(7+a)$; *b)* $(3+5x)(3-5x)$; *c)* $\left(x+2\sqrt{3}\right)\left(x-2\sqrt{3}\right)$;

d) $\left(4+3x^2y\right)\left(4-3x^2y\right)$; *e)* $\left(2+a^2b^2\right)\left(2-a^2b^2\right)$; *f)* $\left(\frac{3}{5}x-1\right)\left(\frac{3}{5}x+1\right)$.

5. Calculați rapid:

a) $43\cdot37$; *b)* $55\cdot65$; *c)* $197\cdot203$; *d)* $101\cdot99$;

Rezolvare. *a)* $43\cdot37=(40+3)(40-3)=40^2-3^2=1600-9=1591$;

6. Efectuați:

a) $(1+a)^3$; *b)* $\left(a^2-1\right)^3$; *c)* $(2+x)^3$; *d)* $\left(1+2ax^2\right)^3$;

e) $\left(y+\sqrt{2}\right)^3$; *f)* $(2x+3y)^3$; *g)* $(5x+a)^3$; *h)* $(x-2y)^3$.

Scanned with OKEN Scanner

7. Calculați:

a) $(1+a+b)^2$; *b)* $(2x+y+z)^2$; *c)* $(2x+y+3z)^2$;

d) $(5+4a+3b)^2$; *e)* $(3x+2y+1)^2$; *f)* $(m+3n+5p)^2$.

8. Folosind formula $(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$, efectuați:

a) $(a+b-c)^2$; *b)* $(x-y+z)^2$; *c)* $(x-y-z)^2$;

d) $(1+2a-3b)^2$; *e)* $(2x-y+1)^2$; *f)* $(2m-n-3p)^2$.

9. Efectuați:

a) $(a+2)(a^2-2a+4)$; *b)* $(x-1)(x^2+x+1)$;

c) $(x+5)(x^2-5x+25)$; *d)* $(y-3)(y^2+3y+9)$;

e) $(x^2+y^3)(x^4-x^2y^3+y^6)$; *f)* $(x-2n)(x^2+2xn+4n^2)$.

**

10. Efectuați:

a) $(x+z)(x^2-xz+z^2)$; *b)* $\left(\frac{2}{3}-m\right)\left(\frac{4}{9}+\frac{2}{3}m+m^2\right)$;

c) $(2x+3)(4x^2-6x+9)$; *d)* $(\sqrt{3}-7a)(3+7\sqrt{3}\,a+49a^2)$;

e) $\left(\frac{2}{5}+\frac{3}{2}x\right)\left(\frac{4}{25}-\frac{3}{5}x+\frac{9}{4}x^2\right)$; *f)* $(x^2-3y)(x^4+3x^2y+9y^2)$.

11. Verificați dacă este adevărată relația:

a) $(x+y-1)^2 = x^2+y^2+1+2xy-2x-2y$; *b)* $(x+2)^3 = x^3+8+6x(x+2)$;

c) $(2x+1)(4x^2-2x+1) = 8x^3+1$; *d)* $(x^2+2x+4)(x-2) = x^3+8$.

12. Folosind identitatea $(a\pm b)^4 = \left[(a\pm b)^2\right]^2$, efectuați:

a) $(x+a)^4$; *b)* $(a-y)^4$; *c)* $(2a+x)^4$; *d)* $(3a-2b^2)^4$.

13. Efectuați:

a) $(x-3)(x+3)(x^2+9)$; *b)* $(7-x)(49+x^2)(7+x)$.

14. Calculați:

a) aria dreptunghiului cu dimensiunile egale cu $L = 4+\sqrt{7}$ și $l = 4-\sqrt{7}$;

b) aria pătratului cu latura egală cu $l = 2a+5 > 0$;

c) aria paralelogramului cu o latură egală cu $B = a+\sqrt{11}$ și înălțimea corespunzătoare acesteia egală cu $h = -a+\sqrt{11}$, $0 < a < \sqrt{11}$;

d) aria rombului cu diagonalele $D = 13+2\sqrt{5}$ și $d = 13-2\sqrt{5}$;

e) aria trapezului de baze $B = 7-3\sqrt{2}$ și $b = 5-2\sqrt{2}$ și înălțime $h = 12+5\sqrt{2}$.

Scanned with OKEN Scanner

15. *a*) Efectuați $x^2-(x+1)^2-(x+2)^2+(x+3)^2$;

b) Calculați $101^2-102^2-103^2+104^2-105^2+106^2+107^2-108^2$.

16. *a*) Efectuați $(10x+y)^2$;

b) Arătați că numărul $\overline{a5}^2-25$ se divide cu 100.

17. *a*) Efectuați: *i*) $(2k)^2$; *ii*) $(2k+1)^2$;

b) Deduceți că, dacă un număr natural dă restul 3 la împărțirea cu 4, atunci numărul nu este pătrat perfect.

c) Arătați că numărul 111151 nu este pătrat perfect.

18. *a*) Efectuați: *i*) $(3k)^2$; *ii*) $(3k+1)^2$; *iii*) $(3k+2)^2$;

b) Deduceți că, dacă un număr natural dă restul 2 la împărțirea cu 3, atunci numărul nu este pătrat perfect.

c) Arătați că numărul 1111121 nu este pătrat perfect.

19. *a*) Efectuați: *i*) $(7k)^2$; *ii*) $(7k\pm1)^2$; *iii*) $(7k\pm2)^2$; *iv*) $(7k\pm3)^2$.

b) Deduceți ce resturi se pot obține prin împărțirea unui pătrat perfect la 7.

c) Arătați că, dacă a și b sunt numere naturale, atunci numărul a^2+b^2 se divide cu 7 dacă și numai dacă a se divide cu 7 și b se divide cu 7.

20. *a*) Efectuați: $(x+1)^2-x^2$;

b) Arătați că, dacă p este un număr natural impar, atunci există un număr natural m astfel încât $p=(m+1)^2-m^2$.

21. *a*) Efectuați $(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)$.

b) Aria unui triunghi cu lungimile laturilor egale cu a, b și c se poate calcula cu formula $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, unde $p=\dfrac{a+b+c}{2}$. (*Formula lui Heron*).

Calculați aria triunghiului cu lungimile laturilor egale cu:

i) $a=1,\ b=\sqrt{2},c=\sqrt{3}$; *ii*) $a=2,\ b=\sqrt{2},c=\sqrt{3}$;

iii) $a=\sqrt{7},\ b=\sqrt{5},c=\sqrt{3}$; *iv*) $a=\sqrt{8},\ b=3\sqrt{2},\ c=\sqrt{26}$.

22. Știind că $x+\dfrac{1}{x}=5$, $x\neq0$, calculați:

a) $x^2+\dfrac{1}{x^2}$; *b*) $x^3+\dfrac{1}{x^3}$; *c*) $x^4+\dfrac{1}{x^4}$; *d*) $x^8+\dfrac{1}{x^8}$.

23. Se consideră numerele reale x și y. Știind că $y=2+x>2$, calculați valoarea expresiei: $E=\sqrt{x^2+y^2-4y+4}-\sqrt{x^2+y^2+2(x-y+1)}$.

24. Știind că numerele m și n sunt naturale, scrieți fiecare dintre următoarele expresii ca o sumă de două pătrate perfecte:

a) $m^2+n^2+2mn+49$; *b*) $25m^2+n^2+10m+6n+10$;

c) $25m^2+n^2+10mn+30m+6n+10$; *d*) $2m^2+2n^2$.

Scanned with OKEN Scanner

Rezolvare: *c)* $25m^2+n^2+10mn+30m+6n+10=(5m)^2+n^2+3^2+2\cdot 5m\cdot n+$
$+2\cdot 5m\cdot 3+2\cdot n\cdot 3+1=(5m+n+3)^2+1^2$.

25. Determinați numerele reale x și y care verifică relația:

a) $(x-1)^2+y^2=0$; *b)* $25x^2+y^2+10x+1=0$;

c) $9x^2+y^2-6x+4y+5=0$; *d)* $2x^2+2y^2-2x+2y+1=0$.

26. Determinați numerele reale x, y și z care satisfac inegalitatea:

a) $\sqrt{x^2-8x+16}+\sqrt{9+6y+y^2}\le 2z-\left(1+z^2\right)$;

b) $\sqrt{5(x^2+4-4x)+4}+\sqrt{y^2+14y+50}\le 10z-z^2-22$.

27. Aflați numerele reale m, n și p, $m>0$, astfel încât $E(x)=(mx+n)^2+p$, pentru oricare $x\in\mathbb{R}$, unde:

a) $E(x)=4x^2-4x+1$; *b)* $E(x)=x^2+6x+10$;

c) $E(x)=9x^2-6x$; *d)* $E(x)=x^2-5x+1$.

Rezolvare: *c)* $E(x)=9x^2-6x+1-1=(3x-1)^2-1$, deci $m=3, n=-1, p=-1$.

***

28. Știind că x este număr real, determinați valoarea minimă a expresiei:

a) x^2+2x+1; *b)* x^2+2x+3; *c)* x^2-2x-3; *d)* x^2+4x;

e) x^2+1; *f)* x^2+x+1; *g)* x^2-x-1; *h)* x^2-3x.

Rezolvare: *f)* $x^2+x+1=x^2+2\cdot x\cdot\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\ge\frac{3}{4}$.

Valoarea minimă a expresiei este egală cu $\frac{3}{4}$ și se obține pentru $x=-\frac{1}{2}$.

29. Știind că x este număr real, determinați valoarea maximă a expresiei:

a) $-x^2-4x-4$; *b)* $-x^2+2x-3$; *c)* $-x^2-2x+5$; *d)* $-x^2+8x$;

e) $-9x^2+1$; *f)* $-x^2-x+1$; *g)* $-x^2-3x-1$; *h)* $5x-3x^2$.

Rezolvare: *c)* $-x^2-2x+5=-(x^2-2x+1-6)=-(x-1)^2+6\le 6$.

Valoarea maximă a expresiei este 6 și se obține pentru $x=1$.

30. Știind că $a^2+\frac{1}{a^2}=23$, calculați:

a) $a+\frac{1}{a}$, unde $a<0$; *b)* $a-\frac{1}{a}$, unde $a>1$.

31. Arătați că, oricare ar fi $a\in\mathbb{Z}$, numerele următoare sunt pătrate perfecte:

a) $(a^2+a)(a^2+a+2)+1$; *b)* $(2a^3+5a^2+a)(2a^3+5a^2+a+2)+1$;

c) $(a^2+a+5)(a^2+a+7)+1$; *d)* $(a^4-3a^2+4)(a^4-3a^2+8)+4$.

32. Demonstrați inegalitățile următoare, pentru orice $a\in\mathbb{R}^*$:

a) $a^2+9\ge 6a$; *b)* $a^4+100\ge 20a^2$;

Scanned with OKEN Scanner

c) $a^2+\frac{1}{a^2}\geq 2$; *d)* $a^4+3a^2+1\geq 2a^3+2a$.

33. Demonstrați că:

a) $(ax+by)^2+(ay-bx)^2=(a^2+b^2)(x^2+y^2)$, oricare ar fi $a,b,x,y\in\mathbb{R}$;

b) $(ax+by)^2\leq(a^2+b^2)(x^2+y^2)$, oricare ar fi $a,b,x,y\in\mathbb{R}$;

c) $5a+12b\leq 13\cdot\sqrt{a^2+b^2}$, oricare ar fi $a,b\in\mathbb{R}$;

d) $\frac{a+b}{2}\leq\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$, oricare ar fi $a,b\in\mathbb{R}$. ($m_a\leq m_p$)

Indicație: *c)* În relația *b)*, se ia $x=5$ și $y=12$; *d)* În relația *b)*, se ia $x=y=1$.

34. *a)* Arătați că $\frac{(x+y)^2-(x-y)^2}{4}=xy$, oricare ar fi numerele reale x și y;

b) Deduceți că, dacă $x,y\geq 0$, atunci $\sqrt{xy}\leq\frac{x+y}{2}$ ($m_g\leq m_a$).

35. *a)* Demonstrați că $a-2\sqrt{ab}+b\geq 0$, oricare ar fi numerele reale $a,b\geq 0$.

b) Deduceți că: $\frac{2ab}{a+b}\leq\sqrt{ab}$ ($m_h\leq m_g$).

Probleme de șapte stele

36. *a)* Demonstrați că, oricare ar fi $a,b,c,x,y,z\in\mathbb{R}$, are loc egalitatea:

$(ax+by+cz)^2+(ay-bx)^2+(bz-cy)^2+(cx-az)^2=(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)$.

b) Arătați că $(ax+by+cz)^2\leq(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)$;

c) Folosind punctul *b)* arătați că $3a+4b+12c\leq 13\sqrt{a^2+b^2+c^2}$, $\forall\, a,b,c\in\mathbb{R}$;

d) Demonstrați că $ab+bc+ca\leq a^2+b^2+c^2$, oricare ar fi $a,b,c\in\mathbb{R}$.

37. *a)* Fie $x\in\mathbb{R}$. Arătați că, dacă $x^2\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$, atunci $x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$.

b) Arătați că numerele $\sqrt{6}$; $\sqrt{\sqrt{6}}$; $5+2\sqrt{6}$; $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ sunt iraționale.

38. Fie numerele naturale nenule a, b, x și y.

a) Arătați că dacă $ax=by$, atunci $(a^2+b^2)(x^2+y^2)$ este pătrat perfect.

b) Dacă $13\cdot(x^2+y^2)=(2x+3y)^2$, determinați valoarea raportului $\frac{x}{y}$

39. Fie a, b două numere întregi nenule diferite și numerele $x=a^2-b^2$ și $y=a^2-2ab$.

a) Arătați că numărul $y=a^2-2ab$ este diferență de pătrate perfecte nenule;

b) Arătați că numărul $x-y$ este diferență de pătrate perfecte nenule;

c) Arătați că numărul x^2-xy+y^2 este pătratul unui număr natural.

Scanned with OKEN Scanner

1.9. Descompunerea în factori

Descompunerea în factori a unei expresii algebrice constă în transformarea expresiei într-un *produs* de două sau mai multe expresii algebrice.

Metode de descompunere în factori

1. Scoaterea factorului comun se bazează pe proprietatea de distributivitate a operației de înmulțire în raport cu adunarea/scăderea numerelor reale: $ax \pm ay = a(x \pm y)$.

2. Utilizarea formulelor de calcul prescurtat

a. $a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2$; **b.** $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$;

c. $a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc = (a+b+c)^2$;

d. $a^3 \pm b^3 = (a \pm b)\left(a^2 \mp ab + b^2\right)$; **e.** $a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3 = (a \pm b)^3$.

1.9.1. Metoda factorului comun

*

1. Calculați folosind factorul comun:

a) $25 \cdot 37 + 63 \cdot 25$; *b)* $45 \cdot 32 - 32 \cdot 1045$; *c)* $57^2 - 56 \cdot 57$;

d) $77^2 - 78 \cdot 77$; *e)* $99^2 - 98 \cdot 99 - 98$; *f)* $89^3 - 88 \cdot 89^2 - 89 \cdot 90$.

2. Scoateți factor comun:

a) $7x + 7y$; *b)* $-5x + 5y$; *c)* $ax + ay$;

d) $ma^2 + na^2 - xa^2$; *e)* $px^2 + p + pa$; *f)* $a(x+y) + b(x+y)$;

g) $-81m^3 - 9m^4$; *h)* $x\sqrt{3} + y\sqrt{3}$; *i)* $\sqrt{2}a - \sqrt{2}b$;

j) $ma + na + xa$; *k)* $x^2 - 3x + x^3$; *l)* $20m^3 - 40m^2 + 60m$;

m) $4a^2 - 2ax + 8a^3x^2$; *n)* $7(5-x) + x(5-x)$; *o)* $7x^2y^2 - 14x^2$.

3. Scoateți factor comun:

a) $-4x - 8xy$; *b)* $4x^2 + 4x$; *c)* $13x - 26x^2$;

d) $9a^2b^2 + 3a^3b$; *e)* $3x^2 - 9x + 6x^3$; *f)* $11x^2(m-n) - 6x(m-n)$;

g) $8 + 16x + 32x^2$; *h)* $y^2 - 5y^3$; *i)* $x^2 + 2x^3$;

j) $4\sqrt{3}x - \sqrt{12}xy$; *k)* $5\sqrt{7}a^2 + \sqrt{7}a^3b^3$; *l)* $\sqrt{23} - 5\sqrt{23}a^2$;

m) $15a - 30a^2b$; *n)* $11x^5y + 22x^5$; *o)* $-0{,}2x^2 + 0{,}6x$;

p) $\frac{5}{3}(a+b) + \frac{x(a+b)}{3} - \frac{14m(a+b)}{3}$; *q)* $\frac{31}{8}x^2 - \frac{31}{4}y^2x^2 + \frac{31}{12}ax^2 - \frac{31}{4}x^2m$.

Scanned with OKEN Scanner

**

4. Se consideră numerele naturale a, b şi c. Calculaţi $E = ab + bc + ca$, ştiind că:

a) $b = 15$, $ac = 1$; *b)* $c = 101$, $ab = 101$; *c)* $a = 1$, $b + c = 1$.

5. Scoateţi factor comun:

a) $15a^2x + 45a^2x^2 - 30ax$; *b)* $43x^2 - 86a^2x + 43x^3$;

c) $2\sqrt{3}x^3 - 4\sqrt{3}x^2 + 16\sqrt{3}x^5$; *d)* $(m+n) + 8a(m+n) - 2x^2(m+n)$.

6. *a)* Arătaţi că numărul $\overline{ab} + \overline{ba}$ se divide cu 11;

b) Arătaţi că numărul $\overline{abc} + \overline{bca} + \overline{cab}$ se divide cu 37.

7. Scoateţi factor comun:

a) $3(a+b) - x(a+b)$; *b)* $a(m+n)^2 - b(m+n)^2$;

c) $a^2(x^2+y^2) + b^2(x^2+y^2)$; *d)* $2m(2m-1)^3 - (2m-1)^3$.

8. Descompuneţi în factori:

a) $(x+1)(x+2) + (x+2)(x+3)$; *b)* $a(a+b) - (2a+1)(a+b)$;

c) $x(3x^2+2) + 2x(2+3x^2)$; *d)* $(2x-3)^2 - 5x(2x-3)$.

***

9. Descompuneţi în factori:

a) $4(m^2+1) - a\sqrt{5}(m^2+1)$; *b)* $11(x^2+a+1) - y(x^2+a+1)$;

c) $2(a-x) + a^2x - a^3$; *d)* $(1-2y)^2 - 1 + 2y$;

e) $3\sqrt{5}(a+b+c) - a^2(a+b+c) + x(a+b+c)$.

10. Arătaţi că, oricare ar fi numărul întreg n, numărul N este număr întreg, unde:

a) $N = \dfrac{n(7n+3) - 6n(3+7n)}{5}$; *b)* $N = \dfrac{n(7n+3) - n(2n-2)}{5n}$.

11. Arătaţi că, oricare ar fi numărul întreg n, numărul N este pătrat perfect, unde:

a) $N = 5n(5n-1) - (5n-1)$; *b)* $N = 2n(2n+1)^3 + (2n+1)^3$.

Probleme de şapte stele

12. Determinaţi numerele reale x care verifică egalităţile:

a) $4x + x = 2\sqrt{5} + 3\sqrt{5}$; *b)* $x + x\sqrt{5} = 4$;

c) $x\sqrt{2} - x\sqrt{3} = 1$; *d)* $x\sqrt{2} + x = -3 - 3\sqrt{2}$.

13. *a)* Se consideră numerele raţionale a, b, c şi d.

Dacă $a\sqrt{2} + b\sqrt{3} = c\sqrt{2} + d\sqrt{3}$, arătaţi că $a = c$ şi $b = d$.

b) Determinaţi numerele raţionale a şi b ştiind că $a\sqrt{2} + 2\sqrt{3} = b\sqrt{2} - 2b\sqrt{3}$.

Scanned with OKEN Scanner

1.9.2. Utilizarea formulelor de calcul prescurtat

*

14. Descompuneți următoarele expresii în produs de factori, utilizând formulele $x^2+2xy+y^2=(x+y)^2$ sau $x^2-2xy+y^2=(x-y)^2$.

a) $a^2+2ab+b^2$; *b)* $m^2-2mn+n^2$; *c)* x^2+2x+1;
d) m^2+2m+1; *e)* $4a^2-4a+1$; *f)* $9x^2+30x+25$;
g) $1+14x+49x^2$; *h)* $4x^2-12x+9$; *i)* $64-16x+x^2$;
j) $100x^2+20xy+y^2$; *k)* $64x^2-80xy+25y^2$; *l)* $36x^4-12x^2y+y^2$;
m) $81+18a^2x+a^4x^2$; *n)* $49a^2-70ab+25b^2$; *p)* $121+22ma+m^2a^2$;
q) $m^2-14mn+49n^2$; *r)* $4a^2-20abc+25b^2c^2$ *s)* $64a^4b^2+176a^2b+121$.

15. Descompuneți în factori:

a) $\left(\sqrt{3}\right)^2+2\sqrt{3}x+x^2$; *b)* $\left(\sqrt{5}\right)^2+2\sqrt{15}x+\left(\sqrt{3}x\right)^2$; *c)* $\sqrt{2^2}-2\sqrt{2}x+x^2$;
d) $x^2+2x\sqrt{2}+2$; *e)* $5-2\sqrt{15}x+3x^2$; *f)* $2x^2+2\sqrt{6}x+3$;
g) $7-2\sqrt{7}x+x^2$; *h)* $\left(2\sqrt{5}\right)^2-4\sqrt{5}z+z^2$; *i)* $20z^2+4z\sqrt{5}+1$.

16. Descompuneți în factori:

a) $(x^2+x)^2+2\cdot(x^2+x)\cdot1+1^2$; *b)* $\left(\sqrt{2}-x\right)^2+2\cdot3\left(\sqrt{2}-x\right)+9$;
c) $9a^2+6a(1+2x)+(1+2x)^2$; *d)* $49x^2-14x(3+11a^2)+(3+11a^2)^2$;
e) $(2x+y)^2+2(2x+y)\cdot5+25$; *f)* $4(3x-a)^2-12b(3x-a)+9b^2$.

17. Descompuneți în factori:

a) $(a-b)^2+2\cdot5\cdot(a-b)(c+d)+25(c+d)^2$;
b) $(x-a)^2+2(x-a)(y+b)+(y+b)^2$;
c) $(x+y)^2+6(x+y)(x-y)+9(x-y)^2$;
d) $(x+2)^2-2(x+2)(y-3)+(y-3)^2$;
e) $\left(a+\sqrt{2}x\right)^2-4(a^2-2x)+4\left(a-\sqrt{2}x\right)^2$.

18. Descompuneți în produs de factori, folosind formula $x^2-y^2=(x+y)(x-y)$

a) a^2-b^2; *b)* a^2-5^2; *c)* 2^2-x^2; *d)* $8^2-(5m)^2$;
e) $36x^2-y^2$; *f)* $36a^2-m^4$; *g)* $81x^2-25y^2$; *h)* $25m^2-1$;
i) $\left(\frac{6}{11}x\right)^2-49y^2$; *j)* $\frac{49}{25}-a^2$; *k)* $\frac{169}{25}x^2-4z^4$; *l)* $\frac{4}{9}x^2-\frac{9}{100}y^8$;
m) $\left(\sqrt{5}\right)^2-x^2$; *n)* $7-x^2$; *p)* $\left(x\sqrt{2}\right)^2-\left(\sqrt{3}\right)^2$; *r)* $5x^2-2$.

Scanned with OKEN Scanner

**

19. Calculați rapid:

a) 215^2-15^2; *b)* 196^2-96^2; *c)* $1{,}5^2-0{,}5^2$; *d)* $10{,}5^2-0{,}5^2$.

20. Determinați valoarea expresiei:

a) x^2-y^2, știind că $x-y=4$ și $x+y=6$;

b) $x+y$, știind că $x^2-y^2=14$ și $x-y=7$.

21. Descompuneți expresiile următoare în produs de cel puțin trei factori:

a) a^4-b^4; *b)* a^4-1; *c)* $16-x^4$; *d)* $81-m^4$;

e) $16x^4-81y^4$; *f)* $16a^4-9$; *g)* $81x^4-25$; *h)* $81m^8-16$.

22. *a)* Verificați dacă numărul $p=117^2-74^2$ este număr prim.

b) Determinați numerele naturale n pentru care numărul $q=n^2-1$ este număr prim.

23. Descompuneți în produs de factori:

a) $(x+2)^2-9$; *b)* $(2x-1)^2-x^2$; *c)* $(3x+2)^2-25x^2$;

d) $(8x-3)^2-(2x+5)^2$; *e)* $(4x+1)^2-(x^2-4x)^2$; *f)* $4x^2-(x^2-5x)^2$.

24. Descompuneți în produs de factori, folosind formula

$$a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc=(a+b+c)^2:$$

a) $x^2+y^2+z^2+2xy+2xz+2yz$;

b) $9+x^2+25y^2+2\cdot3\cdot x+2\cdot3\cdot5y+2\cdot x\cdot5y$;

c) $m^2+4+49x^2+4m+28x+14mx$;

d) $1+a^2+81x^2+2a+18x+18ax$;

e) $4x^2+y^2+36z^2+4xy+24xz+12yz$;

f) $100x^2+9y^4+20x+60xy^2+6y^2+1$;

g) $x^2+a^2+1-2ax+2x-2a$;

h) $400+x^2+a^2+40x-40a-2xa$.

25. Descompuneți în factori, folosind formulele:

$x^3+3x^2y+3xy^2+y^3=(x+y)^3$ sau $x^3-3x^2y+3xy^2-y^3=(x-y)^3$:

a) $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$; *b)* x^3+3x^2+3x+1; *c)* $8x^3+12x^2+6x+1$.

26. Descompuneți în factori:

a) $27a^3-27a^2b^2+9ab^4-b^6$; *b)* $64x^3-48x^2y+12xy^2-y^3$;

c) $125x^3+75x^2y+15xy^2+y^3$; *d)* $m^3-30m^2+300m-1000$;

e) $x^6+6x^4y+12x^2y^2+8y^3$; *f)* $a^3x^6-15a^2x^4y+75ax^2y^2-125y^3$.

Scanned with OKEN Scanner

***

27. *a)* Arătați că $6^2-5^2+4^2-3^2+2^2-1^2=6+5+4+3+2+1$;

b) Calculați: $S=1^2-2^2+3^2-4^2+\ldots+99^2-100^2$.

28. Știind că $x^2+y^2+z^2+2(-2+xy+yz+zx)=0$, calculați $|x+y+z|$.

29. Descompuneți în factori, folosind formulele

$x^3+y^3=(x+y)(x^2-xy+y^2)$ sau $x^3-y^3=(x-y)(x^2+xy+y^2)$.

a) x^3-b^3; *b)* a^3+b^3; *c)* x^3-1; *d)* x^3+8;

e) $27x^3-1$; *f)* $125x^3-8$; *g)* m^6+n^6; *h)* m^6-n^6.

30. Descompuneți în factori:

a) $x^3+12x^2y+48xy^2+64y^3$; *b)* $1000-3300a+3630a^2-1331a^3$;

c) $x^6+6x^4y+12x^2y^2+8y^3$; *d)* $a^3x^6-15a^2x^4y+75ax^2y^2-125y^3$.

Probleme de șapte stele

31. Descompuneți în factori:

a) $a^3+6a^2b+12ab^2+8b^3$; *b)* $x^6-3x^4+3x^2-1$;

c) $125x^3+75x^2y+15xy^2+y^3$; *d)* $b^3-3ab^2x^2+3a^2bx^4-a^3x^6$;

e) $1+\frac{15}{7}x+\frac{75}{49}x^2+\frac{125}{343}x^3$; *f)* $\frac{1}{8}x^6-\frac{3}{20}x^4y^3+\frac{3}{50}x^2y^6-\frac{1}{125}y^9$;

g) $1000a^6-150a^4x+\frac{15}{2}a^2x^2-\frac{1}{8}x^3$.

32. Arătați că, pentru oricare număr natural $n\geq 2$, numărul N este compus, unde:

a) $N=n^5+n+1$; *b)* $N=n^5+n-1$.

Indicație.

a) $N=n^5-n^2+n^2+n+1=n^2(n^3-1)+n^2+n+1=n^2(n-1)(n^2+n+1)+\ldots\ldots$

1.9.3. Descompunerea în factori folosind metode combinate

33. Calculați valoarea expresiei:

a) $a^2+b^2+2(ab+a+b)$, știind că $a+b=5$;

b) $a^2+b^2-2(ab+a-b)$, știind că $a-b=5$;

c) $a-b$, știind că $a+b=4$ și $a^2-b^2=12$;

d) $a^2+b^2+c^2+2(ab+ac+bc)-3(a+b+c)$, știind că $a+b+c=7$.

34. Descompuneți în produs de factori:

a) x^3-4x; *b)* x^3+4x^2+4x; *c)* x^4-8x; *d)* x^4+27x;

e) $3x^3-9x$; *f)* $4x^3-x$; *g)* x^5-16x; *h)* $64x^7-x$.

Scanned with OKEN Scanner

35. *a)* Arătaţi că, oricare ar fi numărul $n \in \mathbb{Z}$, numărul $M = n^3 - n$ se divide cu 6;

b) Arătaţi că, oricare ar fi numărul $n \in \mathbb{Z}$, numărul $N = n^5 - n$ se divide cu 30.

36. Descompuneţi, grupând convenabil termenii:

a) $a(x+y)+bx+by$; *b)* $21x^2 - 7xy + 11(3x-y)$;

c) $3x+6y+mx+2my$; *d)* $12mx - 4my^2 + 15ax - 5ay^2$;

e) $a^2+b^2+6a^2x+6b^2x$; *f)* $2m+n^2+2mx^2+n^2x^2$.

37. Scrieţi expresiile ca diferenţe de pătrate şi apoi descompuneţi în factori:

a) $(x^2+4x+4)-3^2$; *b)* $x^2-4x+4-5^2$; *c)* x^2+4x+3;

d) x^2-2x-3; *e)* $9x^2+6x-35$; *f)* $25x^2+20x-21$.

g) $x^2-20x+96$; *h)* x^2-8x-9; *i)* $x^2+20x+91$;

j) x^2+x-2; *k)* x^2-x-12; *l)* x^2-x-6;

m) x^2-5x+6; *n)* $x^2+13x+30$; *p)* $x^2-15x+56$;

r) $x^2-7x+10$; *s)* $x^2+11x+30$; *t)* $x^2+13x+22$.

38. Descompuneţi în factori expresiile următoare utilizând, eventual, identităţile $x^2-(a+b)x+ab=(x-a)(x-b)$ sau $x^2+(a+b)x+ab=(x+a)(x+b)$:

a) x^2+6x+8; *b)* $x^2-10x+9$; *c)* $x^2-20x+96$;

d) x^2-8x-9; *e)* $x^2-14x+24$; *f)* $x^2-7x+10$;

g) $x^2-15x+56$; *h)* $x^2+23x+60$; *i)* $x^2+17x-60$.

39. Descompuneţi în factori:

a) $x^2+x(a+m)+am$; *b)* $x^2-x(4+m)+4m$;

c) $x^2+(9+\sqrt{5})x+9\sqrt{5}$; *d)* $x^2-x(b+\sqrt{7})+b\sqrt{7}$;

e) $x^2+x(a-5)-5a$; *f)* $x^2+x(9+m)+9m$.

40. Descompuneţi în produs de factori:

a) $(2x^2+3x)(2x^2+3x+4)+4$; *b)* $(5x^2-6x)(5x^2-6x+3)+2$;

c) $(x^2-2xy+y)(x^2-2xy+y+7)+12$ *d)* $(11-3x+7x^2)(7x^2-3x+9)+1$;

e) $(x^3+2x^2+3x+5)(x^3+2x^2+3x+15)+21$.

Rezolvare. *a)* Observăm că suma $2x^2+3x$ se găseşte şi în a doua paranteză.

Notăm, pentru simplificarea calculului, $2x^2+3x=a$ şi avem:

$(2x^2+3x)(2x^2+3x+4)+4 = a(a+4)+4 = a^2+4a+4 = (a+2)^2 = (2x^2+3x+2)^2$.

41. Scrieţi expresiile ca diferenţe de pătrate şi apoi descompuneţi în factori:

a) a^4+4b^4; *b)* $4a^8+b^8$; *c)* $4a^4+b^8$;

d) $a^4+a^2b^2+b^4$; *e)* $a^4+a^2b^4+b^8$; *f)* $a^8-a^4b^2+b^4$;

g) a^4+b^4; *h)* a^4+b^8; *i)* $a^{16}+b^{16}$.

Rezolvare. *g)* $a^4+b^4 = a^4+b^4+2a^2b^2-2a^2b^2 =$

Scanned with OKEN Scanner

$=(a^2+b^2)^2-(\sqrt{2}ab)^2=(a^2+b^2-\sqrt{2}ab)(a^2+b^2+\sqrt{2}ab)$;

42. Arătați că, dacă $a,b,c\in\mathbb{R}$ și $a+b+c=2$, atunci: $b^2+c^2+2bc+3(2a-1)\geq 0$.

43. Arătați că numărul $a=(x^2-x)(x^2+3x+2)+1\cdot 2\cdot 3\cdot 4$ este divizibil cu 24, oricare ar fi $x\in\mathbb{Z}$.

44. Determinați numerele naturale n pentru care numărul $P=n^4+4$ este prim.

45. Determinați cea mai mică valoare a expresiei:

a) x^2+x+1, unde $x\in\mathbb{R}$;

b) $(x^2+x+1)\cdot(x^2-x+1)$, unde $x\in\mathbb{R}$.

46. Determinați valoare minimă a fiecăreia dintre expresiile:

a) $E(x)=9x^2-6x-3$, unde $x\in\mathbb{R}$;

b) $F(x)=(3x-2)(3x+4)$, unde $x\in\mathbb{Q}$;

c) $G(x)=(2x-1)(2x-5)$, unde $x\in\mathbb{Z}$;

d) $H(x)=x^4-6x^2+8$, unde $x\in\mathbb{N}$.

Probleme de șapte stele

47. Se consideră un triunghi cu laturile a, b și c. Arătați că:

a) Dacă $a^4+b^4=c^4+2a^2b^2$, atunci triunghiul este dreptunghic;

b) Dacă $a^2+b^2+c^2=ab+bc+ca$, atunci triunghiul este echilateral;

c) Dacă $a^2b+b^2c+c^2a=a^2c+b^2a+c^2b$, atunci triunghiul este isoscel;

d) Numerele $\sqrt{a}$, $\sqrt{b}$ și $\sqrt{c}$ pot fi lungimile laturilor unui triunghi.

48. Determinați numerele reale notate prin litere ca în modelul dat:

a) $a^2-10x+25+4x^2+4x+1+m^2-6m+9=0$;

b) $(a-7)^2+2(b-3)^2+a^2+x^2+4+2ax+4a+4x=0$;

c) $x^2+y^2+z^2-2x+6y+10z+17+(x-7)^2+(y+3)^2=0$;

d) $36x^2+49y^2-14y+1=-12x-1-(11-z)^2$.

Rezolvare. *a)* Egalitatea se mai scrie: $(a-5)^2+(2x+1)^2+(m-3)^2=0$.

Obținem: $a=5$; $x=-\frac{1}{2}$; $m=3$.

49. Demonstrați că, pentru orice valori $x,y,z\in\mathbb{R}$, au loc inegalitățile:

a) $x^2+y^2\geq 2xy$; *b)* $x^2+y^2\geq -2xy$; *c)* $x^2+6x\geq -9$;

d) $x^2+y^2+z^2\geq xy+xz+yz$; *e)* $(x+y+z)^2\geq 3(xy+xz+yz)$.

50. Arătați că pentru orice numere reale $x,y,z>0$, au loc inegalitățile:

a) $x+\frac{1}{x}\geq 2$; *b)* $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\geq 2$; *c)* $(x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)\geq 9$.

Scanned with OKEN Scanner

51. ***a)*** Fie x şi y două numere reale pozitive. Arătaţi că:

$$x\sqrt{x}+y\sqrt{y}\geq x\sqrt{y}+y\sqrt{x}\,.$$

b) Arătaţi că, pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$, are loc inegalitatea

$$\frac{1}{2\sqrt{2}+1\sqrt{1}}+\frac{1}{3\sqrt{3}+2\sqrt{2}}+\ldots+\frac{1}{(n+1)\sqrt{n+1}+n\sqrt{n}}<1-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\,.$$

52. Lungimile laturilor unui triunghi sunt a, b, c. Arătaţi că, dacă

$$2\cdot\left(a^8+b^8+c^8\right)=\left(a^4+b^4+c^4\right)^2,$$

atunci triunghiul este dreptunghic.

Scanned with OKEN Scanner

E TESTE DE EVALUARE

Testul 1

10. Se consideră expresiile: $E(x)=4x^2-4x+1$ şi $F(x)=4x-2$, unde $x\in\mathbb{R}$.

(1p) a) Calculaţi $F\left(\frac{1}{2}\right)$;

(1p) b) Verificaţi dacă numărul $E(2)-F(2)+1$ este pătrat perfect;

(1p) c) Arătaţi că $E(x)\geq 0$, oricare ar fi $x\in\mathbb{R}$;

(1p) d) Arătaţi că $E(x)=\left[F(x)\right]^2:4$, oricare ar fi $x\in\mathbb{R}$;

(1p) e) Arătaţi că, oricare ar fi $n\in\mathbb{Z}$, $G(n)=E(n)+\left[F(n)\right]^2$ este număr natural impar divizibil cu 5.

11. Se consideră expresia $E(x)=x(x-1)\left(x^2-x-2\right)+1$, unde $x\in\mathbb{R}$.

(1p) a) Arătaţi că $E\left(-\frac{1}{2}\right)=E\left(\frac{3}{2}\right)$;

(1p) b) Descompuneţi în factori expresia x^2-x-2;

(1p) c) Arătaţi că, oricare ar fi $n\in\mathbb{Z}$, numărul $E(n)-1$ se divide cu 24;

(1p) d) Arătaţi că, oricare ar fi $n\in\mathbb{Z}$, numărul $E(n)$ este pătrat perfect.

Notă: Timp de lucru 45 minute. Se acordă 1 punct din oficiu.

Testul 2

1. Se consideră expresiile: $E(x)=4x^2-1$ şi $F(x)=2x^2-x$, unde $x\in\mathbb{R}$.

(1p) a) Arătaţi că $E\left(\frac{1}{2}\right)=F\left(\frac{1}{2}\right)$;

(1p) b) Arătaţi că numărul $E(4)\cdot F(4)$ este pătrat perfect;

(1p) c) Descompuneţi în factori expresia $F(x)$;

(1p) d) Descompuneţi în factori expresia $E(x)-F(x)$;

(1p) e) Determinaţi $n\in\mathbb{Z}$ pentru care $E(n)-F(n)=0$.

2. Se consideră expresia $E(x)=(2x+5)^2-16$, unde $x\in\mathbb{R}$.

(1p) a) Determinaţi valoarea minimă a expresiei $E(x)$ pentru $x\in\mathbb{R}$;

(1p) b) Determinaţi valoarea minimă a expresiei $E(x)$ pentru $x\in\mathbb{N}$;

(1p) c) Arătaţi că, oricare ar fi $n\in\mathbb{N}$, $E(n)$ este număr natural compus;

(1p) d) Arătaţi că există $m\in\mathbb{Z}$ cu proprietatea că $|E(m)|$ este număr prim.

Notă: Timp de lucru 45 minute. Se acordă 1 punct din oficiu.

Scanned with OKEN Scanner

Fişă pentru portofoliul individual

Numele şi prenumele: _____

Clasa a VIII-a ____

A3

Tema nr. I.3: Calcule cu numere reale reprezentate prin litere. Formule de calcul prescurtat. Descompuneri în factori

(1,5p) 1. Completaţi spaţiile punctate astfel încât să obţineţi afirmaţii adevărate:

d) Rezultatul calculului $(x-3)^2$ este .....

e) Prin restrângerea formulei $4a^2-12ab+9b^2$ se obţine ....

f) Rezultatul calculului $9x^3y:(-3xy)+3x^2$ este....

(1,5p) 2. Pentru fiecare dintre enunţurile următoare, dacă enunţul este adevărat, încercuiţi litera „A", în caz contrar încercuiţi litera „F":

a) $3x(x+4)=3x^2+12$. **A** **F**

b) $x^2+4x+4\geq 0$, oricare ar fi $x\in\mathbb{R}$. **A** **F**

c) Numărul $a=x^3-x$ se divide cu 6, oricare ar fi numărul natural x. **A** **F**

(2p) 3. Încercuiţi răspunsul corect la fiecare dintre următoarele exerciţii. Dintre cele patru variante de răspuns, scrise la fiecare cerinţă, doar una este corectă.

a) Ştiind că $x-y=1$, valoarea expresiei $(x-y)\cdot(x+y)-2y$ este egală cu:

A. -1 **B.** 1 **C.** $1-2y$ **D.** -2

b) Valoarea expresiei $(x+y-1)^{2007}$ pentru $x=1-a$ şi $y=1+a$ este egală cu:

A. 0 **B.** 1 **C.** 2007 **D.** 2

c) $\left(2-\sqrt{3}\right)^2-(-4+5)$ se obţine:

A. $8-4\sqrt{3}$ **B.** $7-4\sqrt{3}$ **C.** $6-4\sqrt{3}$ **D.** 14

d) Ştiind că $\frac{x}{y}=\frac{3}{4}$, valoarea expresiei x^2y^2-44 este egală cu:

A. 44 **B.** 144 **C.** -32 **D.** 100

Scanned with OKEN Scanner

La următoarele subiecte scrieți pe fișa de evaluare rezolvările complete.

(2p) 4. Fie numerele $a=\sqrt{2-\sqrt{2}}$ și $b=\sqrt{2+\sqrt{2}}$.

a) Calculați $a\cdot b$; *b)* Calculați $(a+b)^2$; *c)* Arătați că numărul $\frac{b}{a}-\sqrt{2}\in\mathbb{Q}$.

(2p) 5. Fie expresia $E(x)=(x+1)^2+2\cdot(x-7)+1$, unde $x\in\mathbb{R}$.

a) Arătați că $E(x)=(x-2)\cdot(x+6)$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$;

b) Calculați $E(-1)$; *c)* Arătați că $E(x)+16\geq 0$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$.

NOTĂ: Timp de lucru 50 minute. Se acordă un punct din oficiu.

Scanned with OKEN Scanner

1.10. Rapoarte de numere reale reprezentate prin litere. Amplificarea. Simplificarea

Un raport în care termenii sunt expresii algebrice, se numeşte ***fracţie algebrică*** sau ***expresie algebrică raţională.***

O fracţie algebrică **nu** are valoarea definită pentru acele valori ale variabilelor care anulează numitorul.

Exemplu. Dacă $E(x)=x+2$ şi $G(x)=3x-6$, cu $G(x)\neq 0$, adică $x\neq 2$, atunci $F(x)=\dfrac{E(x)}{G(x)}=\dfrac{x+2}{3x-6}$, este o fracţie algebrică. Spunem că fracţia F ***este definită*** pentru $x\in\mathbb{R}\setminus\{2\}$.

Pentru $a\in\mathbb{R}\setminus\{2\}$, numărul $F(a)=\dfrac{a+2}{3a-6}$ se numeşte ***valoarea fracţiei*** F în punctul a. De exemplu $F(3)=\dfrac{3+2}{3\cdot 3-6}=\dfrac{5}{3}$.

Amplificarea. Prin amplificarea fracţiei algebrice $\dfrac{F(x)}{G(x)}$, $G(x)\neq 0$, cu expresia $E(x)\neq 0$ se obţine fracţia : $\overset{E(x))}{\dfrac{F(x)}{G(x)}}=\dfrac{F(x)\cdot E(x)}{G(x)\cdot E(x)}$.

Simplificarea. Prin simplificarea fracţiei algebrice $\dfrac{F(x)\cdot E(x)}{G(x)\cdot E(x)}$, $G(x)\neq 0$, cu expresia $E(x)\neq 0$ se obţine fracţia: $\dfrac{F(x)\cdot E(x)}{G(x)\cdot E(x)}\overset{(E(x)}{=}\dfrac{F(x)}{G(x)}$.

Observaţii.

1. Suma şi produsul a două fracţii algebrice sunt fracţii algebrice.
2. Dacă $F(x)=\dfrac{E(x)}{G(x)}$, cu $G(x)\neq 0$ şi $E(x)\neq 0$, atunci expresia $\left(F(x)\right)^{-1}=\dfrac{G(x)}{E(x)}$ este fracţie algebrică.

---

*

1. Determinaţi valorile variabilei x pentru care fracţia dată **nu** este definită:

a) $\dfrac{5}{x}$; *b)* $-\dfrac{11}{10x}$; *c)* $\dfrac{1}{x-1}$; *d)* $\dfrac{x}{(x-1)^2}$; *e)* $\dfrac{-2}{x+1}$;

f) $\dfrac{13}{x(x-2)}$; *g)* $\dfrac{15}{x^2(x+2)}$; *h)* $\dfrac{8}{x^2-9}$; *i)* $\dfrac{-x}{x^2+4}$; *j)* $\dfrac{3x}{x(x^2-5)}$.

Scanned with OKEN Scanner

2. Se consideră fracția $E(x)=\frac{2x}{x^2+1}$, unde $x\in\mathbb{R}$. Calculați:

a) $E(-1)$; *b)* $E\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$; *c)* $E\left(-\frac{1}{2}\right)$; *d)* $E\left(\sqrt{3}\right)$; *e)* $E(2)$.

3. Scrieți fracțiile rezultate în urma amplificării ($x\neq 0, x\neq -1$):

a) $\frac{5}{11}\ ^{9)}$; *b)* $\frac{\sqrt{5}}{3}\ ^{\sqrt{5})}$; *c)* $\frac{x}{x+1}\ ^{x)}$; *d)* $\frac{x}{x^2+1}\ ^{-2x)}$; *e)* $\frac{x-1}{x}\ ^{x+1)}$.

4. Amplificați cu $x-2$ fracțiile ($x\neq 2$):

a) $\frac{2}{3}$; *b)* $\frac{x}{x-2}$; *c)* $\frac{x+2}{x-2}$; *d)* $\frac{2x^3}{x^2+1}$; *e)* $\frac{x-1}{x^2+2}$.

5. Scrieți fracțiile rezultate în urma simplificării ($x>0$):

a) $\frac{21}{35}\ ^{(7}$; *b)* $\frac{\sqrt{6}}{2\sqrt{3}}\ ^{(\sqrt{3}}$; *c)* $\frac{4x}{6x^2}\ ^{(2x}$; *d)* $\frac{x^3}{x(x+1)}\ ^{(x}$; *e)* $\frac{x+2}{x^2+2x}\ ^{(x+2}$.

6. Simplificați cu $x+3$ fracțiile, $x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$:

a) $\frac{x(x+3)}{x+3}$; *b)* $\frac{(x+1)(x+3)}{2x(x+3)}$; *c)* $\frac{(x+3)^2}{(x-3)(x+3)}$; *d)* $\frac{(x+3)(7x+1)}{(x+2)(x+3)^2}$;

7. Simplificați fracțiile ($x>0$, $y>0$, $z>0$):

a) $\frac{17}{34}$; *b)* $\frac{7x}{21x^2}$; *c)* $\frac{24x^3y^2}{18x^2yz^3}$; *d)* $\frac{27x^3y}{45x^2y^2}$; *e)* $\frac{56x^3y^2}{14x^2y}$.

8. Menționați condițiile în care fracțiile date sunt definite și simplificați-le:

a) $\frac{15x(x+1)}{9x^2(x+1)^2}$; *b)* $\frac{13x^2(x+5)}{39x^2(x+5)^2}$; *c)* $\frac{(2-x)(2+x)}{(x+2)^2(2-x)}$; *d)* $\frac{(4-x)^2(4+x)}{(x+4)(4-x)}$.

e) $\frac{8x(x-2)^3}{6x^2(x-2)^2}$; *f)* $\frac{2(2-x)x^2}{2x(x+2)^2}$; *g)* $\frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)^2}$; *h)* $\frac{(x+3)^2}{(x-3)(x+3)}$.

9. Menționați condițiile în care fracțiile date sunt definite și simplificați-le:

a) $\frac{x^2-4}{(x+2)^2}$; *b)* $\frac{(x-3)(x+3)}{x^2-6x+9}$; *c)* $\frac{x^2-4}{x^2-4x+4}$;

d) $\frac{x^3-9x}{x^3-6x^2+9x}$; *e)* $\frac{x^3-4x}{x^2-4x+4}$; *f)* $\frac{4x^2+20x+25}{4x^2-25}$;

g) $\frac{x^4-16}{x^4-8x^2+16}$; *h)* $\frac{x^3+3x^2+3x+1}{2x\left(x^2+2x+1\right)}$; *i)* $\frac{x^3-3x^2+3x-1}{3x^3-6x^2+3x}$;

j) $\frac{4x^3-16x}{x^3+6x^2+12x+8}$; *k)* $\frac{x^4-9x^3+27x^2-27x}{4x^3-36x}$; *l)* $\frac{2x^3+2x}{x^4-1}$.

Scanned with OKEN Scanner

**

10. Determinați valorile variabilei x pentru care fracția dată **nu** este definită:

a) $\frac{11}{5x}$; *b)* $\frac{7x}{x-3}$; *c)* $\frac{12}{x+4}$; *d)* $\frac{41}{x(x+5)}$;

e) $\frac{15}{7x^2-7x}$; *f)* $\frac{-9}{4x^2-9}$; *g)* $\frac{23x}{x^2-4x+4}$; *h)* $\frac{0,27x}{3x^3-3x}$;

i) $\frac{x+1}{(x-2)(x-6)}$; *j)* $\frac{2x+5}{(x+3)(x-7)}$; *k)* $\frac{-4x}{x(x+2)(x-7)}$;

l) $\frac{3x+11}{4x(x+1)^2(x-3)}$; *m)* $\frac{4x+8}{x^2+4x+4}$; *n)* $\frac{(x-1)(x-2)(x+3)}{(x-4)(x-5)(x+6)}$.

11. Se consideră rapoartele $E(x)=\frac{x^2-1}{x^2+1}$ și $F(x)=\frac{x}{x^2+1}$. Calculați:

a) $E(-1)+F(-1)$; *b)* $E\left(\frac{1}{2}\right)+F\left(\frac{1}{2}\right)$; *c)* $E\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)+F\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$;

d) $E(-1)\cdot F(-1)$; *e)* $E\left(\frac{1}{2}\right)\cdot F\left(\frac{1}{2}\right)$; *f)* $E\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\cdot F\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$.

12. Menționați condițiile de existență și aduceți fracțiile la același numitor:

a) $\frac{7}{x}$ și $\frac{12}{a}$; *b)* $\frac{2}{x+1}$ și $\frac{3}{x-1}$; *c)* $\frac{4}{x}, \frac{1}{3x}$ și $\frac{2}{x+1}$;

d) $\frac{3}{x}, \frac{a}{5}$ și $\frac{-5}{6x}$; *e)* $\frac{7x}{x(x-1)}$ și $\frac{-2x+3}{(x-1)^2}$; *f)* $\frac{4}{2x-5}$ și $\frac{x-11}{x(2x+5)}$.

13. Menționați condițiile de existență și aduceți fracțiile la același numitor:

a) $\frac{7x^2y}{3a^2b}; \frac{15x}{12a^2b^2}$ și $\frac{-a}{6b^3}$; *b)* $\frac{2x}{a(a-x)}; \frac{a}{x(a+x)}$ și $\frac{x+1}{a^2-x^2}$.

14. Menționați condițiile în care fracțiile date sunt definite și simplificați-le:

a) $\frac{5x}{15x}$; *b)* $\frac{25x^2}{5x^2+5x}$; *c)* $\frac{20x^2-15x}{75x^3}$; *d)* $\frac{65x}{10x^2-5x}$.

e) $\frac{2x-3}{5a(2x-3)}$; *f)* $\frac{(2x-3)^2}{6x^2-9x}$; *g)* $\frac{4x^2-9}{4x^2-12x+9}$; *h)* $\frac{14x^2-21x}{10x-15}$.

15. Menționați condițiile în care fracțiile date sunt definite și simplificați-le:

a) $\frac{2x^2+8x+8}{3x(x+2)^2}$; *b)* $\frac{3x^3+6x^2+3x}{7x^3-7x}$; *c)* $\frac{x^4-1}{2x^3+2x^2+2x+2}$;

d) $\frac{2x^2+11x-6}{3x^2+17x-6}$; *e)* $\frac{5x^2+13x-6}{5x^2-7x+2}$; *f)* $\frac{11x^3-22x^2+11x}{x^3-3x^2+3x-1}$;

Scanned with OKEN Scanner

g) $\frac{3x^3+6x^2+3x}{x^3+3x^2+3x+1}$; h) $\frac{5x^3-45x}{5x^3-10x^2-15x}$; i) $\frac{2x^3-72x}{4x^3-48x^2+144x}$;

j) $\frac{x^4-8x^2+16}{x^3+2x^2-4x-8}$; k) $\frac{3x^3-30x^2+75x}{x^3-125}$; l) $\frac{x^3+3x^2+3x+1}{4x^3+8x^2+4x}$.

16. Menționați condițiile în care fracțiile date sunt definite și simplificați-le:

a) $\frac{3x^2-22x+7}{x^2-49}$; b) $\frac{8+15x-2x^2}{3+5x-2x^2}$; c) $\frac{6x^2+43x+7}{18x^2-9x-2}$;

d) $\frac{4x^2+13x+9}{4x^2+5x-9}$; e) $\frac{9x^2+46x+5}{9x^2-17x-2}$; f) $\frac{7x^2+9x+2}{14x^2-17x-6}$;

g) $\frac{x^3+3x^2-x-3}{x^3-x^2-9x+9}$; h) $\frac{2x^3+5x^2-8x-20}{4x^3+8x^2-25x-50}$; i) $\frac{3x^3+5x^2-3x-5}{2x^3+7x^2-2x-7}$;

j) $\frac{x^3+7x^2-9x-63}{x^3-2x^2-9x+18}$; k) $\frac{x^3+3x^2-4x-12}{6x^3+x^2-24x-4}$; l) $\frac{x^4-16}{3x^4-6x^3+12x^2-24x}$.

17. Menționați condițiile în care fracțiile date sunt definite și simplificați-le:

a) $\frac{ax+ay+bx+by}{11x(a+b)(x^2-y^2)}$; b) $\frac{mx+nx+my+ny}{mx^3+nx^3+my^3+ny^3}$.

***

18. Menționați condițiile în care fracțiile date sunt definite și simplificați-le:

a) $\frac{(4x+7)^2-(x-5)^2}{(5x+2)(x^2-16)}$; b) $\frac{25-(3x-y)^2}{(5+3x)^2-y^2}$; c) $\frac{(3x+1)^2-(x+2)^2}{(x+5)^2-(x-4)^2}$;

d) $\frac{(2x+5)^2-(x-1)^2}{3x^2+x-4}$; e) $\frac{a^2-(x+1)^2}{3ax-3x^2-3x}$; f) $\frac{(4a+3b)^2-(2a-b)^2}{(5a-b)^2-(a+3b)^2}$.

19. Menționați condițiile în care fracțiile date sunt definite și simplificați-le:

a) $\frac{a^2+b^2+c^2+2bc+2ab+2ac}{ax+bx+cx-ay-by-cy}$; b) $\frac{x^2-y^2-10xz+25z^2}{x^2+y^2+25z^2+2xy-10xz-10yz}$.

20. Menționați condițiile în care fracțiile date sunt definite și simplificați-le:

a) $\frac{x^3+8}{-x^3+5x^2-10x+12}$; b) $\frac{x^3+6x^2+11x+6}{x^3-7x-6}$; c) $\frac{3x^3+x^2-12x-4}{7x^3-x^2-28x+4}$.

21. Menționați condițiile în care fracțiile date sunt definite și simplificați-le:

a) $\frac{(a+b)^2+2(a+b)+1}{3a^2+3ab+3a}$; b) $\frac{5a^2-5ab-5a}{(a-b)^2-2(a-b)+1}$;

c) $\frac{(a+b)^3+3(a+b)^2+3(a+b)+1}{(a+b)^2-1}$; d) $\frac{(2a+3)^2-2\cdot(2a+3)\cdot 7+49}{(5a+3)(a^2-4a+4)}$.

Scanned with OKEN Scanner

e) $\dfrac{x^n+2x^{n-1}+2x^{n-2}+\ldots+2x^2+2x+1}{x^{n-1}+x^{n-2}+\ldots+x+1}$.

22. Menționați condițiile în care fracțiile date sunt definite și simplificați-le:

a) $\dfrac{\left(x^2+2x+5\right)^2-5\left(x^2+2x+5\right)+6}{\left(x+1\right)^2+1}$;

b) $\dfrac{\left(x^2+3x-5\right)\left(x^2+3x-7\right)+1}{\left(x^2+3x+3\right)\left(x^2+3x-7\right)+9}$;

c) $\dfrac{\left(x^2-7x+11\right)\left(x^2-7x+13\right)+1}{\left(x^2-7x+10\right)\left(x^2-7x+14\right)+4}$;

d) $\dfrac{\left(x^2-3x\right)\left(x^2-3x+4\right)+4}{\left(x^2-5x+3\right)\left(x^2-5x+5\right)+1}$;

e) $\dfrac{\left(x^2-6x+5\right)\left(x^2-6x+11\right)+9}{\left(x^2+x-4\right)\left(x^2+x-8\right)+4}$;

f) $\dfrac{\left(x^2+x-9\right)\left(x^2+x-15\right)+9}{\left(x^2+7x+7\right)\left(x^2+7x+17\right)+25}$.

Probleme de șapte stele

23. Fie expresia $E(x)=\dfrac{\left(x-4\right)^2+8\left(x-4\right)+15}{\left(x+5\right)^2-7\left(x+5\right)+12}$. Determinați:

a) Mulțimea D a numerelor $x\in\mathbb{R}$ pentru care expresia este definită;

b) Elementele mulțimii $A=\left\{x\in\mathbb{Z}\,\middle|\,E(x)\in\mathbb{Z}\right\}$;

c) Elementele mulțimii $B=\left\{x\in\mathbb{R}\,\middle|\,E(x)=\dfrac{5}{3}\right\}$.

24. Se consideră raportul $F(x)=\dfrac{x^3+3x^2+8x+6}{x+1}$, $x\neq-1$.

Arătați că $\dfrac{1}{F(a)-5}>0$, oricare ar fi $a\in\mathbb{R}-\left\{-1\right\}$.

25. Se consideră fracția algebrică $E(x)=\dfrac{x^3+5x^2-x-5}{x^3-5x^2-x+5}$, unde $x\in\mathbb{R}-\left\{\pm1,-5\right\}$.

Determinați elementele mulțimii $A=\left\{a\in\mathbb{R}\,\middle|\,\left|E(a)\right|=\dfrac{1}{2}\right\}$.

Scanned with OKEN Scanner

1.11. Operații cu rapoarte de numere reale reprezentate prin litere

1.11.1. Adunarea și scăderea

*

1. Efectuați:

a) $\frac{a}{5}+\frac{3a}{5}$; *b)* $\frac{x}{7}+\frac{3-x}{7}$; *c)* $\frac{x+2}{x}+\frac{x-1}{x}$;

d) $\frac{13}{x^2+1}+\frac{-5}{x^2+1}$; *e)* $\frac{x}{x-2}+\frac{-2}{x-2}$; *f)* $\frac{3a}{a+5}+\frac{a-2}{a+5}+\frac{-1}{a+5}$;

g) $\frac{5x}{3}+\frac{4x}{9}$; *h)* $\frac{x+1}{4}+\frac{2x-5}{8}$; *i)* $\frac{x+1}{7x}+\frac{x-3}{21x}$;

j) $\frac{3x+5}{11}+\frac{x}{3}$ *k)* $\frac{x}{6}+\frac{x+1}{3}+\frac{5}{2}$; *l)* $\frac{-1}{x(x+1)}+\frac{x-1}{x+1}$.

2. Efectuați :

a) $\frac{7}{2x+3}+\frac{8}{2x+3}+\frac{-15}{2x+3}$; *b)* $\frac{4x+0,7}{x(x-3)}+\frac{2x-0,7}{x(x-3)}+\frac{-9}{x(x-3)}$;

c) $\frac{4x+3}{3(x+1)}+\frac{-2}{5(x+1)}$; *d)* $\frac{5}{x+1}+\frac{11}{2x+2}+\frac{-4}{3x+3}$; *e)* $\frac{x}{x-2}+\frac{1}{x+2}$;

f) $\frac{4x}{2x-3}+\frac{x}{2x+3}$; *g)* $\frac{2x-5}{x(x+7)}+\frac{1}{x+7}+\frac{4x-3}{x}$; *h)* $\frac{3}{x+2}+\frac{x}{x-2}+\frac{6x-x^2}{x^2-4}$.

3. Efectuați :

a) $\frac{3\sqrt{2}}{5x}-\frac{\sqrt{2}}{5x}$; *b)* $\frac{9x-7}{x^2-5x+9}-\frac{6x}{x^2-5x+9}-\frac{5}{x^2-5x+9}$;

c) $\frac{17}{12xy^2}-\frac{13}{12xy^2}$; *d)* $\frac{12x-1}{3x(6-2x)}-\frac{5x}{3x(6-2x)}-\frac{13}{3x(6-2x)}$;

e) $\frac{3x-5}{x+6}-\frac{x-5}{x+6}-\frac{-4}{x+6}$; *f)* $\frac{x^2-3x+5}{21}-\frac{x^2-1}{21}-\frac{3-x}{21}$;

g) $\frac{7x-5}{47}-\frac{2x-9}{47}$; *h)* $\frac{10}{2x(x+1)}-\frac{5-3x}{2x(x+1)}-\frac{x-11}{2x(x+1)}$.

4. Efectuați:

a) $\frac{a}{5}-\frac{a}{3}$; *b)* $\frac{a-1}{2a}-\frac{a-3}{5a}$; *c)* $\frac{1}{x}-\frac{3}{x+1}$;

d) $\frac{5}{3x}-\frac{1}{3(x+1)}$; *e)* $\frac{4x^2-7}{(2x-7)(5-x)}-\frac{2x+4}{3x(2x-7)}-\frac{6x+8}{3x(5-x)}$;

Scanned with OKEN Scanner

f) $\frac{8x}{5}-\frac{3}{2x}-\frac{x-7}{10x}$;

g) $\frac{23x}{x^2-1}-\frac{5}{x-1}-\frac{3-x}{x+1}$;

h) $\frac{x^2-3x+7}{5(x+3)}-\frac{2x}{x+3}-\frac{1}{5}$;

i) $\frac{9x+5}{x^2-9}-\frac{4x}{x-3}-\frac{1}{x+3}$;

j) $\frac{3x^2-4x+1}{4x(x-2)(x+3)}-\frac{5x-6}{4x(x-2)}$;

k) $\frac{13x+4}{7x(x+2)(5x-1)}-\frac{3}{(x+2)(5x-1)}$.

5. Efectuați:

a) $\frac{7x+1}{11x}+\frac{5x-3}{11x}$;

b) $\frac{a+1}{\sqrt{3}a}+\frac{5}{\sqrt{3}a}-\frac{a-2}{\sqrt{3}a}$;

c) $\frac{x-7}{y+a}-\frac{3}{y+a}+\frac{x+4}{y+a}$;

d) $\frac{14x-21}{5x\left(x^2+b\right)}+\frac{8x}{5x\left(x^2+b\right)}-\frac{11x}{5x\left(x^2+b\right)}$;

e) $\frac{18-7x^2}{(2x+1)(3y-x)}+\frac{6x-5}{(2x+1)(3y-x)}-\frac{6-x-4x^2}{(2x+1)(3y-x)}$;

f) $\frac{17-2x^2}{x^2\left(x+a+b\right)}+\frac{9+3x^2}{x^2\left(x+a+b\right)}-\frac{26-x+x^2}{x^2\left(x+a+b\right)}$;

g) $\frac{14x-9}{(6x-5)(3x+7)}+\frac{6x}{(6x-5)(3x+7)}-\frac{10x-3}{(6x-5)(3x+7)}$.

6. Efectuați:

a) $\frac{1}{2}-\frac{3}{x}+\frac{5}{2x}$;

b) $1-\frac{3x-4}{2x-3}$;

c) $\frac{7x-4}{4x+1}-3$;

d) $2+\frac{x-1}{5x}-\frac{1}{x+1}$;

e) $\frac{7}{x+3}-\frac{8}{5x-1}$;

f) $\frac{1}{11x}+\frac{1}{2x-5}-\frac{1}{2x+5}$;

g) $\frac{6x}{xy-x^2}-\frac{1}{x}+\frac{2}{y-x}$;

h) $\frac{9}{x+4}-\frac{1}{5-3x}$;

i) $\frac{3}{2x-1}-\frac{1}{5}+\frac{x}{5(x+6)}$;

j) $\frac{x}{x+2}-\frac{3}{x+1}+\frac{1}{x+1}$;

k) $\frac{1}{5x(x^2-4)}-\frac{1}{5x(x-2)}+\frac{1}{x(x+2)}$;

l) $\frac{1}{9x(x+1)^2}-\frac{3}{x^2+2x+1}+\frac{2}{9x(x+1)}$.

**

7. Efectuați:

a) $\frac{x}{7}+\frac{3x}{7}$;

b) $\frac{5x-1}{11}+\frac{4-3x}{11}$;

c) $\frac{9x-1}{3x}+\frac{7}{3x}$;

d) $\frac{\sqrt{2}\,x}{x+1}+\frac{-3}{x+1}$;

e) $\frac{15-6x}{\sqrt{2}x\left(x+5\right)}+\frac{13+2x}{\sqrt{2}x\left(x+5\right)}$;

f) $\frac{2a-3}{a(x+y)}+\frac{5}{a(x+y)}+\frac{a-2}{a(x+y)}$;

g) $\frac{\sqrt{3}+x}{4x(x-1)}+\frac{3x-\sqrt{3}}{4x(x-1)}+\frac{5}{4x(x-1)}$;

h) $\frac{\sqrt{2}-x}{\sqrt{3}x(x+7)}+\frac{\sqrt{8}+x}{\sqrt{3}x(x+7)}$.

Scanned with OKEN Scanner

8. Efectuați:

a) $\frac{7x-3}{x^2-4}+\frac{2}{x+2}+\frac{1}{x-2}$;

b) $\frac{3}{x^2-2x+1}+\frac{1}{x-2}$;

c) $\frac{3x+4}{9x^2-25}+\frac{-2}{3x+5}+\frac{x}{3x-5}$;

d) $\frac{6x^2-7x+3}{x^3-1}+\frac{1}{x-1}+\frac{5}{x^2+x+1}$;

e) $\frac{2x^2-5x}{x^2\left(x^2-36\right)}+\frac{2x+1}{x^2(x+6)}+\frac{1}{x^2}$;

f) $\frac{x^2+x-3}{(2x+3)(6-x)}-\frac{5x+1}{6-x}+1$;

g) $\frac{13x-\sqrt{7}}{x^2\left(x^2-36\right)}+\frac{4x-1}{x^2\left(x^2-36\right)}+\frac{1+\sqrt{7}+3x}{x^2\left(x^2-36\right)}$.

9. Efectuați:

a) $\frac{3x-1}{5x}-\frac{2x}{5x}$;

b) $\frac{4x}{x+11}-\frac{2x}{x+11}$;

c) $\frac{7-5x}{x(2x+3)}-\frac{3}{x(2x+3)}$;

d) $\frac{1}{4x(x-1)}-\frac{5-4x}{4x(x-1)}-\frac{2}{4x(x-1)}$.

10. Efectuați:

a) $\frac{3}{x}-\frac{5}{x+4}$; *b)* $\frac{-2}{3x-1}-\frac{1}{2x}$; *c)* $\frac{8x}{(3x-5)(x+6)}-\frac{5}{3x-5}-\frac{1}{x+6}$;

d) $\frac{3}{5x^2\left(x^2-9\right)}-\frac{1}{x^2}-\frac{8}{x\left(x^2-9\right)}$; *e)* $\frac{5-x}{24x\left(x^2-16\right)}-\frac{x}{6(x+4)}-\frac{1}{12x(x-4)}$;

f) $\frac{1}{2}-\frac{3}{2x(7x-5)}-\frac{2}{x(7x-5)}$; *g)* $\frac{2x-8}{13x(4x-7)}-\frac{x^2-3}{x(4x-7)}-\frac{12}{4x-7}-\frac{1}{13x}$.

11. Efectuați:

a) $1+\frac{2x+7}{x^3+2x^2+x}-\frac{2}{(x+1)^2}+\frac{4}{x}$; *b)* $\frac{5}{x^4-16}-\frac{3}{x^2-4}+\frac{8}{x^2+4}$;

c) $\frac{6x+11}{9x^2-49}-\frac{3}{x}+\frac{1}{3x-7}+\frac{5}{3x+7}$; *d)* $\frac{5x-4}{(x-1)(x+2)}-\frac{3x+11}{(x+2)(x+3)}$.

12. Efectuați:

a) $\frac{1}{ab(a+b+c)}+\frac{1}{bc(a+b+c)}+\frac{1}{ac(a+b+c)}$;

b) $\frac{3}{x^2+xy}-\frac{1}{xy+y^2}+\frac{2}{x+y}$;

c) $\frac{2}{x-y}-\frac{3xy}{x^3-y^3}+\frac{x+y}{x^2+xy+y^2}$;

d) $\frac{11a-9}{2ax+2x^2}-\frac{3}{2x}+\frac{5}{a+x}$;

e) $\frac{3x-1}{x^2-x+1}-\frac{1}{x+1}$;

f) $\frac{3}{x^2-xy+y^2}-\frac{2}{x+y}+\frac{1}{x^3+y^3}$;

g) $\frac{9}{x^3-36x}+\frac{5}{x^2+6x}-\frac{2}{x-6}$.

Scanned with OKEN Scanner

***

13. Efectuați:

a) $\frac{3a^3}{a^4-16}-\frac{1}{a+2}+\frac{5}{a-2}-\frac{4a}{a^2+4}$; *b)* $\frac{3+y^2-2x^2}{x^3+y^3}-\frac{1}{x+y}+\frac{2x-y}{x^2-xy+y^2}$;

c) $\frac{5}{2x^2-6x}+\frac{11}{3x^2-12x}-\frac{1}{x^2-7x+12}$; *d)* $\frac{x^2+xy+y^2}{x^3-y^3}-\frac{x^2-xy+y^2}{x^3+y^3}+\frac{5}{x^2-y^2}$;

e) $\frac{x^3+2x^2-5x+1}{(x^2-4)(x^2-9)}-\frac{2x-3}{x^2-4}+\frac{1}{x^2-9}-\frac{3x+7}{(x-2)(x+3)}+\frac{2}{(x-2)(x^2-9)}$;

f) $\frac{5x^2-11x-13}{12x(x+8)(4x^2-9)}-\frac{3}{12x(x+8)}+\frac{1}{4x^2-9}-\frac{7x-1}{(x+8)(4x^2-9)}+\frac{x^2-x-1}{12x(x+8)(2x-3)}$

14. Se consideră expresia $E(x)=\frac{3-x}{3+x}+\frac{3+x}{3-x}+\frac{12x}{x^2-9}$.

a) Determinați numerele reale x pentru care $E(x)$ nu există.

b) Arătați că $E(x)=\frac{2(3-x)}{x+3}$;

c) Determinați numerele întregi x pentru care $E(x)\in\mathbb{Z}$.

15. *a)* Arătați că $\frac{k}{a(a+k)}=\frac{1}{a}-\frac{1}{a+k}$, pentru oricare $a\in\mathbb{R}^*$, $k\neq -a$.

b) Pentru $a, k\in\mathbb{N}^*$, calculați sumele:

$S_1=\frac{1}{a(a+1)}+\frac{1}{(a+1)(a+2)}+\frac{1}{(a+3)\cdot(a+4)}+\ldots+\frac{1}{(a+2011)(a+2012)}$

și $S_2=\frac{2}{1\cdot 3}+\frac{2}{3\cdot 5}+\frac{2}{5\cdot 7}+\ldots+\frac{2}{(2k-1)(2k+1)}$.

16. Fie expresia $E(y)=\frac{1}{(y+1)^2}+\frac{1}{y^2-1}+\frac{1}{(y-1)^2}-\frac{2y^2+2}{(y^2-1)^2}$.

a) Pentru ce valori reale ale lui y expresia nu are valoarea definită (nu are sens)?

b) Arătați că $E(y)=\frac{1}{y^2-1}$;

c) Rezolvați ecuația: $7\cdot E(y)=\frac{3}{y-1}$;

d) Determinați valorile întregi ale lui y pentru care $4(y+1)\cdot E(y)$ este număr întreg;

e) Scrieți cu ajutorul intervalelor mulțimea $A=\left\{y\in\mathbb{R}\,\middle|\,\left|[(y-1)\cdot E(y)]^{-1}\right|\leq 5\right\}$.

Scanned with OKEN Scanner

17. Fie expresia $E(x)=\frac{1}{x+1}-\frac{2+2x}{x^3+1}+\frac{2}{x^2-x+1}$.

a) Determinaţi $x\in\mathbb{R}$ pentru care $E(x)$ nu are valoarea definită;

b) Arătaţi că expresia $(x+1)\cdot E(x)$ nu depinde de x;

c) Rezolvaţi ecuaţia: $3\cdot E(x)=\frac{1}{7}$;

d) Determinaţi valorile întregi ale lui x pentru care $6\cdot E(x)\in\mathbb{Z}$;

e) Calculaţi suma $E(1)\cdot E(2)+E(2)\cdot E(3)+...+E(19)\cdot E(20)$.

18. Fie expresia $E(x)=\frac{2x+6}{x^2+4x+3}-\frac{4}{x-1}-\frac{5x-13}{x^2-1}$ şi fie D mulţimea numerelor reale x pentru care expresia $E(x)$ are sens.

a) Determinaţi mulţimea D;

b) Aduceţi expresia $E(x)$ la forma cea mai simplă.

c) Aflaţi $n\in\mathbb{Z}$ pentru care $E(n)\in\mathbb{N}$;

d) Arătaţi că $\frac{1}{a}\cdot E\left(\frac{1}{a}\right)=E(a)$, pentru orice $a\in\mathbb{N}$, $a\geq 2$;

e) Scrieţi ca reuniune de intervale mulţimea $A=\left\{x\in D\,\middle|\,|E(x)|>14\right\}$.

19. Fie expresia $E(x)=\frac{x}{x^2-x}+\frac{x+2}{2+x-2x^2-x^3}+\frac{x^2}{x^2+x}$.

a) Determinaţi $x\in\mathbb{R}$ pentru care $E(x)$ nu are valoarea definită;

b) Aduceţi expresia $E(x)$ la forma cea mai simplă.

c) Rezolvaţi ecuaţia: $E(x)=3$;

d) Calculţi produsul $P=E(2)\cdot E(3)\cdot E(4)\cdot...\cdot E(2011)$;

e) Fie suma $S=E(2)+E(4)+E(6)+...+E(2012)$. Calculaţi $\frac{S}{1006}$.

Scanned with OKEN Scanner

1.11.2. Înmulțirea, împărțirea, ridicarea la putere. Expresii cu toate operațiile

*

1. Efectuați:

a) $\frac{5}{7}\cdot\frac{3}{5}$; b) $\frac{a}{11}\cdot\frac{22}{5a^2}$; c) $\frac{13xy}{5a}\cdot\frac{10a}{x^2y}$;

d) $-\frac{7}{6}\cdot\left(-\frac{12}{14x}\right)$; e) $(-8m)\cdot\frac{3x}{24m^2}$; f) $\frac{4\sqrt{3}}{5\sqrt{2}}\cdot\left(-\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}\right)$;

g) $\frac{x+3}{44a}\cdot\frac{22ab}{x+3}$; h) $\frac{3}{14}\cdot\left(-\frac{2}{5x}\right)\cdot\left(-\frac{7x^2}{6}\right)$; i) $\frac{8}{5x}\cdot\left(-\frac{5}{4}\right)\cdot\left(-\frac{x}{7}\right)$.

2. Efectuați:

a) $\frac{6x}{5y+3}\cdot\frac{5y+3}{2x}$; b) $\frac{7m^2a}{x(4x+1)}\cdot\frac{4x+1}{14ma}$; c) $\frac{15}{49}\cdot\frac{14x}{25y}\cdot\frac{35y(x+1)}{3x(x+1)}$;

d) $\frac{-5a^2}{7bx}\cdot\frac{7x}{10a}\cdot\frac{3}{4}$; e) $\frac{-(a-5x)}{a+2b}\cdot\frac{a+2b}{a-5x}$; f) $\frac{-7x}{13a^2}\cdot\left(\frac{-39a^2b}{21x}\right)\cdot\left(-\frac{1}{2b}\right)$.

3. Efectuați:

a) $\frac{2(3a-1)}{13(b+x)}\cdot\frac{13(a+b)}{4(y-a)}\cdot\frac{y-a}{a+b}$; b) $\frac{x+3}{18a^2}\cdot\frac{36a^4}{(x+3)^2}\cdot\left(-\frac{7x^2}{6}\right)$;

c) $\frac{2x-7}{9-x}\cdot\frac{81-x^2}{14x^2}\cdot\frac{28x}{2x-7}$; d) $\frac{4\sqrt{3}}{5x^2a}\cdot\frac{2x-7}{8\sqrt{3}ab}\cdot\frac{2a^2b}{4x^2-49}$.

e) $\frac{3}{8x^2}\cdot\left(-\frac{16x}{9}\right)\cdot\left(-\frac{3}{\sqrt{5}(2-6x)}\right)\cdot\frac{x^3}{4x-11}\cdot\left(-\frac{4x-11}{117}\right)$.

4. Efectuați:

a) $\frac{2}{5}:\frac{4}{15}$; b) $\frac{11}{9}:\frac{22}{21}$; c) $\frac{3}{10}:\frac{6}{70}$; d) $\frac{-6}{21}:\frac{2}{7}$;

e) $\frac{a}{m}:\frac{3ax}{my}$; f) $\frac{4}{3}:\left(-\frac{2a}{3b}\right)$; g) $1:\frac{15}{13}$; h) $3:\frac{12a}{5b}$;

i) $\frac{8x^2y}{9ab^2}:\frac{4xy}{3ab}$; j) $\frac{-18x^2y^3z}{35ab^2c^3}:\frac{-6xy^2z}{7abc^3}$; k) $\frac{14}{5x^2}:\frac{7}{5x}:\left(-\frac{2}{x^2}\right)$;

l) $\frac{3}{2}:\frac{15}{8}:\frac{4a}{3b}$; m) $\frac{24a^2b}{(x-8)^2}:\frac{6a}{x-8}:\frac{2b}{5}$; n) $\frac{32x^2(x+y)^3}{49(2x-5)^2}:\frac{8x}{7}:\frac{(x+y)^2}{(2x-5)^2}$.

5. Efectuați:

a) $\frac{-4x}{9ay}:\frac{-2x}{3a}$; b) $\frac{2x-5}{a+3b}\cdot\frac{(a+3b)^2}{4(2x-5)}$; c) $\frac{5}{12}\cdot\frac{6x}{25y}:\frac{3x^2}{5y^2}$;

Scanned with OKEN Scanner

d) $\frac{x+2}{8y}\cdot\frac{4y^2}{5x(x+2)}$; *e)* $0,(54):\frac{6x}{11y}$; *f)* $\frac{x+2y}{6-5x}:\frac{3}{6-5x}:\frac{15(x+2y)}{a}$.

6. Calculați:

a) $\frac{13}{7x^2a}\cdot\frac{(x+1)^2}{26(5-x)}:\frac{(x+1)^2}{7x(5-x)}$; *b)* $\frac{1}{8x}\cdot\frac{4x-7}{3x^2}:\frac{4x-7}{24x^3}$;

c) $\frac{9x^2b}{4ac^2}:\frac{3x-11}{5-4x}\cdot\frac{6ax-22a}{15x-12x^2}$; *d)* $\frac{x+1}{x+2}\cdot\frac{x+3}{x+4}:\frac{(x+1)(x+5)}{(x+2)(x+4)}$;

e) $\frac{1}{x+1}:\frac{1}{x+2}:\frac{1}{x+3}\cdot\frac{x+1}{x+3}$; *f)* $\frac{3x^2}{5-4x}\cdot\frac{8-3x}{6x^2}\cdot\frac{9+7x}{8-3x}:\frac{9+7x}{5-4x}$.

7. Calculați:

a) $\left(-\frac{2}{3}\right)^2$; *b)* $\left(\frac{1}{5}\right)^3$; *c)* $\left(\frac{-2}{3}\right)^4$; *d)* $\left(\frac{a}{2b}\right)^5$;

e) $\left(\frac{1}{x^2}\right)^6$; *f)* $\left(\frac{x^2y}{am^3}\right)^{10}$; *g)* $\left(\frac{-8x^5y^3}{7ab^2}\right)^2$; *h)* $\left(\frac{x+1}{a+b}\right)^2$;

i) $\left(\frac{x+1}{4xy^2}\right)^3$; *j)* $\left(\frac{7x}{x+2}\right)^3$; *k)* $\left(\frac{-5x^2}{a+b}\right)^2$; *l)* $\left(\frac{\sqrt{2}\,x^2a^3}{2mb^2c}\right)^4$.

8. Efectuați:

a) $\left[\left(-\frac{5}{3}\right)^6\right]^3:\left(-\frac{5}{3}\right)^{15}$; *b)* $\left(\frac{x^2}{ab^2y}\right)^3\cdot\left(\frac{x^2}{ab^2y}\right)^4\cdot\left(\frac{x^2}{ab^2y}\right)^6$;

c) $\left[\left(\frac{2}{7}\right)^4\right]^3:\left(\frac{2}{7}\right)^{10}$; *d)* $\left(\frac{xy^2z^3}{abc}\right)^2\cdot\left(\frac{xy^2z^3}{abc}\right)^3:\left(\frac{xy^2z^3}{abc}\right)^4$;

e) $\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^3$; *f)* $\left(-\frac{x^2}{ab^2}\right)^3\cdot\left(-\frac{x^2}{ab^2}\right)^4\cdot\left(-\frac{x^2}{ab^2}\right)^5:\left[\left(-\frac{x^2}{ab^2}\right)^2\right]^3$;

g) $\left[\left(\frac{5x}{2y^2}\right)^3\right]^2:\left(\frac{5x}{2y^2}\right)^5$; *h)* $\left\{\left[\left(\frac{11a^2b}{5xy}\right)^2\right]^3\right\}^5:\left[\left(\frac{11a^2b}{5xy}\right)^4\right]^7$.

9. Calculați:

a) $\left(\frac{5}{x+6}-\frac{3}{x+6}+\frac{11}{x+6}\right)\cdot\frac{x+6}{26}$; *b)* $\left(\frac{7x-5}{3x+a}+\frac{2x-1}{3x+a}\right):\frac{3}{3x+a}$;

c) $\left(\frac{6}{7+a}+\frac{3}{a+7}\right):\frac{18}{(a+7)(a+1)}$; *d)* $\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)\cdot\frac{xy}{x^2+y^2}$;

e) $\left(\frac{a}{4x+5}+\frac{3}{4x+5}\right):\frac{1}{4x+5}+7-a$; *f)* $\left(\frac{2x-11}{x-5}+\frac{3-x}{x-5}\right):\frac{2}{x-5}+\frac{x}{2}$;

g) $\left(\frac{9}{2x-7}+\frac{x-3}{2x-7}\right)\cdot\frac{2x-7}{5-4x}+\frac{x+2}{5-4x}$.

Scanned with OKEN Scanner

10. Calculați:

a) $\left(1-\frac{2x-3}{3x+1}\right)\cdot\frac{3x+1}{15}:\frac{x}{75}+\frac{x-5}{2x}$;

b) $x-\frac{x^2-4}{2x+1}\cdot\frac{2x+1}{x-2}+\left[\frac{(x-1)^2\cdot(5x+3)}{4x+7}\right]^3\cdot\frac{(4x+7)^3}{(x-1)^5(5x+3)^3}$;

c) $\left(\frac{3}{5+2x}+\frac{1}{x-1}\right)\cdot\frac{4x+10}{5x+2}+\frac{9-x^2}{4x+7}:\frac{3+x}{4x+7}$;

d) $\left(\frac{1}{2x^2-7}-\frac{4x}{3x^2-7}\right)\cdot\frac{3x^2-7}{x+6}+\frac{4x^2-49}{x^2-36}:\frac{2x+7}{x-6}$;

e) $\left(\frac{2}{x-2}-\frac{3}{x+3}\right)\cdot\frac{5x(x+3)}{12-x}-\frac{8}{x-2}+\frac{81}{x^2-4}\cdot\frac{x+2}{9}$.

11. Efectuați:

a) $\frac{15}{24}\cdot\frac{-8}{5}$; *b)* $\frac{12x}{\sqrt{7}y}\cdot\frac{3\sqrt{7}y}{4x}$; *c)* $\frac{-2}{5ax}\cdot\frac{25a^2}{4}$;

d) $\frac{9a}{22x}\cdot\frac{11x^2}{18a}$; *e)* $-0,(7)\cdot\frac{9x}{77}$; *f)* $\frac{-(x+3)}{2x}\cdot\frac{5x^2}{(x+3)^2}\cdot\frac{-1}{5}$;

g) $\frac{7x-5}{x^2+2a}\cdot\frac{y(x^2+2a)}{mx+6}\cdot\frac{mx+6}{3(7x-5)}$; *h)* $-\frac{2}{25}\cdot\frac{4x+3}{6x^2}\cdot\frac{15}{4x+3}$;

i) $\frac{7x}{6x+11}\cdot\frac{4-3x}{21x^2}\cdot\frac{-3(6x+11)}{16-9x^2}$; *j)* $\frac{x^2-4x+4}{3(11-5x)}\cdot\frac{66-30x}{x-2}\cdot\frac{-2}{x^2-4}\cdot\frac{x+2}{8}$.

12. Efectuați:

a) $\frac{-3}{5}:\frac{21}{25}$; *b)* $\frac{2\sqrt{3}}{7\sqrt{11}}:\frac{4\sqrt{3}}{35\sqrt{11}}$; *c)* $\frac{7m}{3n^2a}:\frac{m^2}{12n^2a^2}$;

d) $\frac{-8}{-7}:\frac{-32}{21}$; *e)* $\frac{20x^2y}{13ma^3}:\frac{10xy}{39m^2a^2}$; *f)* $\frac{44a(2x-3)}{7x^2(a+5b)}:\frac{22a^2(2x-3)^2}{21x(a+5b)}$;

g) $\frac{a(7x-6y)}{8x(2a-7b)}:\frac{5am(7x-6y)}{2x^2(2a-7b)}$; *h)* $\frac{12}{25}:\frac{-4m}{2x-3}:\frac{8m(2x-3)}{6x(x+a)}$.

13. Calculați:

a) $\frac{2}{3}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^3$; *b)* $\left(-\frac{6}{5a^2}\right)^{-3}$; *c)* $\left(\frac{m}{5}\right)^3:\left(\frac{m}{5}\right)^3:\left(\frac{m}{5}\right)^3$;

d) $\left(\frac{1}{x}\right)^{-4}$; *e)* $\left\{\left[\left(-\frac{1}{2}\right)^3\right]^2\right\}^2$; *f)* $\left[\left(-\frac{x}{3}\right)^2\right]^3$;

g) $\left[\left(-\frac{7x}{3a}\right)\cdot\left(-\frac{7x}{3a}\right)^5:\left(-\frac{7x}{3a}\right)^6\right]^{2008}$; *h)* $\left(\frac{2x-3}{4x}\right)^3\cdot\left(\frac{2x}{2x-3}\right)^5$.

Scanned with OKEN Scanner

14. Calculați:

a) $\dfrac{\dfrac{a}{a-1}-\dfrac{a+1}{a}}{\dfrac{a}{a+1}-\dfrac{a-1}{a}}$;

b) $\dfrac{\dfrac{a+b}{a-b}+\dfrac{a-b}{a+b}}{\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}}\cdot\dfrac{a+b}{2ab}$;

**

15. Descompuneți, simplificați și efectuați înmulțirile:

a) $\dfrac{x^2-4}{25-y^2}\cdot\dfrac{5+y}{x-2}$;

b) $\dfrac{7x+14x^2}{x^2-6x}\cdot\dfrac{x^2-36}{1+2x}$;

c) $\dfrac{x^2-6x+9}{4x^2-25}\cdot\dfrac{2x+5}{4(x-3)}\cdot\dfrac{4x^2-20x+25}{7x-21}$;

d) $\dfrac{x^3+3x^2+3x+1}{a^2+2ab+b^2}\cdot\dfrac{a^2-b^2}{x^2+2x+1}$;

e) $\dfrac{3x^2a-3y^2a}{5x-1}\cdot\dfrac{25x^2-1}{3(x+y)}\cdot\dfrac{\sqrt{7}\,a}{2x-2y}$;

f) $\dfrac{x^2-8x+12}{x^2-7x+10}\cdot\dfrac{x^2-25}{x^2-36}\cdot\dfrac{3x+18}{2x+10}$;

g) $\dfrac{a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc}{49x^2-25}\cdot\dfrac{21x^2+15x}{(a+b)^2-c^2}$.

16. Efectuați:

a) $\dfrac{1}{5x}:\dfrac{1}{27x^3-8}\cdot\dfrac{15x^2+10x}{9x^2-4}$;

b) $\dfrac{a^2-1}{a^2+a}:\dfrac{7a-7}{3a^2}\cdot\dfrac{14}{a^2+a}$;

c) $\dfrac{a^2-3a}{a^2+1}\cdot\left(5-a^3\right):\dfrac{5a^4-a^7}{a^2+1}$;

d) $\dfrac{x^2+14x+49}{16x^2-25}:\dfrac{x+7}{4x^2+5x}$;

e) $\dfrac{3x+11}{x^2y}:\dfrac{6ax+22a}{9x^2y^2}\cdot\left(\dfrac{3}{y}\right)^2$;

f) $\dfrac{15-33x}{4a^2b}:\dfrac{5-11x}{12ab}\cdot\dfrac{2a}{9b}$;

g) $\dfrac{100-20x+x^2}{4x(x-8)}\cdot\dfrac{x^2-64}{40-4x}:\dfrac{10-x}{16x^2}\cdot\dfrac{7}{x+8}$.

17. Efectuați:

a) $\left(-\dfrac{2a}{5b}\right)^3\cdot\left(-\dfrac{2a}{5b}\right)^7:\left(-\dfrac{2a}{5b}\right)^{10}$;

b) $\left[\left(\dfrac{3x-9}{x(x-1)}\right)^6\right]^4:\left(\dfrac{3x-9}{x(x-1)}\right)^{20}:\left(\dfrac{3(x-3)}{x(x-1)}\right)^2$;

c) $\left[\dfrac{(a+b)^3}{(x-y)^2}\right]^5\cdot\dfrac{(x-y)^8}{(a+b)^7}:\dfrac{(a+b)^6}{(x-y)^2}$;

d) $\left(\dfrac{0,(2)x}{a^2}\right)^2\cdot\left(\dfrac{2x}{9a^2}\right)^5:\left[\left(\dfrac{2x}{9a^2}\right)^2\right]^3\cdot\dfrac{9a^2}{2x}$;

e) $\left[\left(\dfrac{\sqrt{3}}{5x}\right)^2\right]^4\cdot\left(\dfrac{3}{25x^2}\right)^7:\left(\dfrac{3}{25x^2}\right)^{10}$;

f) $\left(\dfrac{x}{3a}\right)^4\cdot\left(\dfrac{x}{3a}\right)^6\cdot\left(\dfrac{x}{3a}\right)^8\cdot\left(\dfrac{x}{3a}\right)^{10}:\left(\dfrac{x}{3a}\right)^{23}$.

18. Efectuați:

Scanned with OKEN Scanner

a) $\frac{5x+6}{x^2-4}-\frac{x+3}{x-2}:\frac{x^2+5x+6}{x-2}$;

b) $\left(\frac{2}{3x-1}-\frac{3}{3x+1}+\frac{5}{9x^2-1}\right)\cdot\frac{9x^2-6x+1}{5x}$;

c) $\left(\frac{-4ab}{a+b}+a+b\right):\left(\frac{b}{b-a}-\frac{2ab}{a^2-b^2}-\frac{a}{a+b}\right)$;

d) $\left(a-\frac{2}{a+b}\right):\left(b-\frac{2}{a+b}\right)+\frac{2-ab}{b^2+ab-2}$;

e) $\left(\frac{x-7}{x+4}+3\right):\left(\frac{2}{x+4}-\frac{3}{x-4}\right)\cdot\frac{x+20}{4x+5}+4$;

f) $\left[\left(\frac{1}{2x-1}+3\right)^2\right]^5\cdot\left(\frac{x-1}{3x-1}+\frac{1}{2(3x-1)}\right)^9-\left(1-\frac{2}{x+1}\right)^4\cdot\frac{(x+1)^5}{(x-1)^3}$.

19. Efectuați:

a) $\left(\frac{5}{4x-3}-\frac{1}{4x+3}+\frac{4x-6}{16x^2-9}\right):\frac{5x+3}{4x-3}-2$;

b) $\left(\frac{2}{x+5}+\frac{x-1}{x^2-25}-\frac{55-11x}{x^2-10x+25}\right)\cdot\frac{7x^2-70x+175}{14(7x+22)}+\frac{10}{x+5}$;

c) $\left(\frac{x-y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}+\frac{x-2\sqrt{xy}+y}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}-\frac{6x^2-24y^2}{18}\cdot\frac{9}{x-2y}:\frac{3(x+2y)}{2}$;

d) $\left(\frac{2x}{4x-3}+\frac{5x}{4x+3}-1\right)\cdot\frac{(4x-3)^2}{4x^2-3x+3}+\left(8-\frac{6x+7}{x+4}\right)\cdot\frac{x^2-16}{2x+25}$;

e) $\left(\frac{2}{x-4}+\frac{x-5}{x^2+4x+16}-\frac{53-x-x^2}{x^3-64}\right)\cdot\frac{x(x+4)+16}{2x+1}+\frac{7x-3}{x-4}-1$.

f) $\left(\frac{x}{x^2-9}-\frac{1}{x+3}-\frac{2}{x-3}\right):\left(x-3+\frac{5-x^2}{x+3}\right)$;

g) $\left(\frac{x+7}{x}-\frac{x+3}{x+1}-\frac{2-x}{x^2+x}\right):\frac{12x+10}{x^3+2x^2+x}$.

20. Se consideră expresia $E(x)=\left(1+\frac{1}{x-2}-\frac{2}{x+2}\right):\frac{1}{x^2-4}-x^2+5x$.

a) Pentru ce valori reale ale lui x expresia dată nu are valoarea definită?
b) Aduceți expresia la forma cea mai simplă.
c) Rezolvați ecuația $E(x)=13$.

21. Fie expresia $E(x)=7-2\cdot\frac{x+1}{x-1}\cdot\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}\right):(x-1)^{-2}$.

a) Pentru ce valori reale ale lui x expresia E nu are valoarea definită?
b) Arătați că expresia are valoare constantă (nu depinde de x).

Scanned with OKEN Scanner

22. Fie expresia $E(x)=\left[\left(\frac{x+3}{x-3}\right)^2+1+\frac{2x+6}{x-3}\right]\cdot\frac{x-3}{4x}-1$.

a) Pentru ce valori ale lui x expresia E nu are sens?

b) Aduceți expresia la o formă mai simplă.

c) Determinați $a\in\mathbb{Z}$ astfel încât $E(a)$ să fie număr întreg.

d) Determinați $a\in\mathbb{Z}$ astfel încât $E(a)$ să fie număr întreg divizibil cu 3.

23. Fie fracția $F(x,y)=\frac{16x^2+y^2+8xy+40x+25+10y}{16x^2-25+8xy+y^2}$.

a) Simplificați fracția F;

b) Calculați $F(2;-1)$;

c) Calculați $F(a;-2a+3)$ pentru $a\in\mathbb{R}-\{-4;1\}$.

d) Determinați valorile întregi ale lui a pentru care $F(a;-2a+3)\in\mathbb{Z}$.

24. Fie expresia $E(x)=x^5-5x^3+4x$.

a) Descompuneți $E(x)$ și arătați că, pentru orice $a\in\mathbb{Z}$, $E(a)$ se divide cu 120.

b) Verificați că: $\frac{(x+3)E(x)}{(x-1)(x-2)}=\left(x^2+3x\right)\left(x^2+3x+2\right)$, unde $x\neq 1$ și $x\neq 2$;

c) Rezolvați ecuația $\frac{E(x)}{x^3+2x^2+x}=x(x-1)$.

d) Calculați suma $S=F(0)+F(1)+\ldots+F(100)$, unde $F(x)=\frac{x^3-3x^2+2x}{E(x)}$.

25. Fie $E(x)=\left[\left(\frac{x+1}{3x-3}-\frac{4}{3x^2-3}-\frac{x-2}{3x+3}\right)\cdot\frac{6x}{5x+10}-\frac{x}{x+2}\right]\cdot\frac{7x+14}{2(x-1)}$.

a) Pentru ce valori reale ale lui x expresia E nu are valoarea definită?

b) Aduceți expresia $E(x)$ la forma cea mai simplă;

c) Determinați $x\in\mathbb{Z}$ pentru care $E(x)\in\mathbb{Z}$;

d) Scrieți mulțimea $A=\left\{x\in\mathbb{R}\,\middle|\,|2(x+1)\cdot E(x)-3|\leq 11\right\}$ folosind intervale.

26. Se consideră expresia: $E(x)=3+\frac{2}{x^2-2x+3}$.

a) Aflați $x\in\mathbb{R}$ pentru care expresia $E(x)$ are sens;

b) Arătați că $E(x)\in(3;4]$, oricare ar fi $x\in\mathbb{R}$;

c) Calculați partea întreagă a numărului $E(x)$, pentru $x\in\mathbb{R}$.

27. Fie expresia $E(x)=\frac{8x^2+8x-6}{4x^2+12x+9}$.

a) Pentru ce valori reale ale lui x expresia E nu are valoarea definită?

Scanned with OKEN Scanner

b) Simplificați $E(x)$.

c) Determinați valorile întregi ale lui x pentru care $E(x)$ ia valori întregi.

28. Fie expresia $A(x)=\left(\frac{2}{x-2}-\frac{2}{x+1}\right):\frac{2}{x(x+1)(x-2)}$.

a) Calculați suma valorilor lui $x\in\mathbb{R}$ pentru care expresia $A(x)$ nu are sens.

b) Arătați că $x^2+2A(x)+9$ este pătrat perfect pentru orice număr întreg x pentru care expresia $A(x)$ are sens.

c) Există valori întregi ale lui x pentru care $A(x)\cdot\left(2-\sqrt{5}\right)\in\mathbb{Q}$?

29. Fie expresia $E(x)=|x-100|+|x-99|+...+|x-1|+|x+1|+...+|x+99|+|x+100|$.

a) Arătați că $E(101)=E(-101)$ și calculați această valoare.

b) Stabiliți dacă $E(0)$ este număr par;

c) Arătați că dacă $a\geq 102$, atunci $E(a)=E(-a)$;

30. Fie expresia $E(x)=5+\frac{6}{x^2-4x+10}$.

a) Pentru ce valori ale lui x expresia are valoarea definită?

b) Arătați că $E(x)\in(5,6]$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

c) Determinați partea întreagă din $E(x)$.

d) Aflați $x\in\mathbb{R}$, pentru care partea întreagă a lui $E(x)$ este 6.

31. Fie expresia $E(x)=\left[\left(\frac{x+5}{x-5}\right)^2+1+\frac{2x+10}{x-5}\right]\cdot\frac{x-5}{4x}+2$.

a) Pentru ce valori ale lui x expresia nu are valoarea definită?

b) Aduceți expresia la forma cea mai simplă;

c) Determinați valorile lui $a\in\mathbb{Z}$ pentru care $E(a)$ este număr întreg;

d) Rezolvați ecuația $E(x)=4$.

32. Expresia $E(x)$ verifică egalitatea $(x^3-x)E(x)+13-(x+1)^2=(x+2)^2$.

a) Calculați $E(x)$ pentru $x\in\mathbb{R}\setminus\{-1,0,1\}$ și aduceți-o la forma cea mai simplă.

b) Calculați suma $S=E(3)+E(4)+E(5)+E(6)$.

c) Găsiți numerele $x\in\mathbb{N}^*$ pentru care partea întreagă a lui $E(x)$ este nenulă.

33. Fie expresia $E(x)=\frac{18x^2-3x-10}{9x^2+12x+4}$.

a) Calculați suma $S=E(-1)+E(0)+E(1)$;

b) Simplificați $E(x)$;

c) Există valori întregi ale lui x pentru care $E(x)$ ia valori întregi?

34. Fie expresia $E(x)=x^5-10x^3+9x$.

Scanned with OKEN Scanner

a) Descompuneți $E(x)$ și arătați că, dacă x este un număr întreg, multiplu de 3, atunci $E(x)$ este divizibil cu 27.

b) Verificați dacă $(x^2-4)E(x)$ se divide cu 840, pentru $x\in\mathbb{Z}$

c) Verificați dacă $\dfrac{(x+2)E(x)}{x^2-4x+3}=(x^2+2x)(x^2+4x+3)$;

d) Calculați suma $S=F(1)+F(2)+\ldots+F(2012)$ unde $F(x)=\dfrac{(x^2-9)(x-1)}{E(x)}$.

35. Fie expresia $F(x)=\left(\dfrac{2x+1}{x}-\dfrac{x-2}{2x-1}-\dfrac{3x^2(2x+1)+3x+2x^2}{4x^3-x}\right):\dfrac{1}{2x^2-x}$, unde $x\in\mathbb{R}\setminus\left\{\pm\dfrac{1}{2},0\right\}$. Arătați că $F(x)=x-2+\dfrac{1}{2x+1}$.

***

36. Fie expresia $E(x)=\dfrac{(x+6)^3-x-6}{x(x+13)+42}+\dfrac{(x^2-4)(x+1)}{x^2-x-2}$.

a) Calculați $E(5)$.

b) Arătați că $(x+6)^3-x-6=(x+5)(x+6)(x+7)$.

c) Descompuneți expresia $E\left((k+1)^3\right)+E\left(k^3\right)-12$, unde k este număr natural.

37. *a)* Arătați că: $\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}=\dfrac{1}{n(n+1)}$ și $\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+3}=\dfrac{3}{n(n+3)}$.

b) Care este al cincilea termen al sumei $S=\dfrac{1}{1\cdot2}+\dfrac{2}{2\cdot4}+\dfrac{3}{4\cdot7}+\ldots$?

c) Arătați că suma primilor cinci termeni ai sumei este un număr subunitar.

38. Fie expresia $E(x)=\dfrac{x^3+2x^2-3x-6}{x^2-4}$, unde $x\in\mathbb{R}\setminus\{-2,2\}$.

a) Arătați că $E(x)$ se simplifică prin $x+2$.

b) Calculați $E(-1)\cdot E(0)\cdot E(1)$;

c) Fie $n\in\mathbb{N}$, $n\geq3$. Verificați dacă $(n-2)E(n)+6(n+2)$ este pătrat perfect.

39. Fie expresia $F(x)=\dfrac{x^2+6x+9}{x^2+x-6}$.

a) Să se arate că $F(x)=1+\dfrac{5}{x-2}$ pentru orice $x\in\mathbb{R}\setminus\{-3;2\}$.

b) Să se determine $x\in\mathbb{N}\setminus\{2\}$ pentru care $F(x)$ este număr natural:

c) Calculați $S=F(1\cdot2+2)+F(2\cdot3+2)+F(3\cdot4+2)+\ldots+F(2012\cdot2013+2)$.

Scanned with OKEN Scanner

40. ***a)*** Arătați că $E(x)=\dfrac{x^2-x-6}{x-3}-\dfrac{x^2-6x+8}{x-4}$ este număr natural pătrat perfect pentru orice $x\in\mathbb{R}\setminus\{3,4\}$.

b) Arătați că $a=2x\left(1-2x^2\right)+4x^2\left(x+1\right)+2\left(x+2\right)$ este un număr pozitiv pentru orice $x\in\mathbb{R}$.

41. Fie expresia $F(x)=\left(\dfrac{2x^2-7x-17}{x^2-10x+21}-\dfrac{x+1}{x-7}\right):\dfrac{1}{x^2-9}$, unde $x\in\mathbb{R}\setminus\{-3,3,7\}$.

a) Aduceți expresia la forma cea mai simplă.

b) Arătați că $F(x)$ este număr natural par pentru orice număr natural $x\geq 8$.

42. Fie expresia $E(x)=\left(\dfrac{7x-1}{x^2-1}+\dfrac{x-2}{x+1}+\dfrac{x+2}{1-x}\right)\cdot\left(x+3+\dfrac{4}{x-1}\right)$

a) Aduceți expresia la forma cea mai simplă.

b) Determinați valorile $x\in\mathbb{Z}$ pentru care $E(x)\in\mathbb{Z}$.

c) Calculați $E(-2)\cdot E(-3)\cdot\ldots\cdot E(-100)$.

43. Fie expresia $E(x)=1-\dfrac{2}{x^2+2x-3}\cdot\left(1+\dfrac{x^2+2x+5}{4x+4}\right):\dfrac{1-x}{2x+2}$.

a) Aduceți expresia la forma cea mai simplă.

b) Determinați valorile lui x pentru care expresia are valoarea definită.

c) Aflați $n\in\mathbb{Z}$ pentru care $\sqrt{E(n)}\in\mathbb{N}$.

44. Se consideră expresia

$$E(x)=\frac{1}{x^2+x}+\frac{1}{x^2+3x+1\cdot 2}+\frac{1}{x^2+5x+2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{x^2+4021x+2010\cdot 2011}.$$

a) Determinați valorile $x\in\mathbb{R}$ pentru care expresia are sens.

b) Aduceți expresia $E(x)$ la forma cea mai simplă.

c) Rezolvați ecuația $\dfrac{2011}{E(x)}=x+2011$.

45. Fie $E(x,y)=9x^2+20y^2-24xy+12x-8y+15$.

a) Demonstrați că $E(x,y)>0$, oricare ar fi $x,y\in\mathbb{R}$.

b) Aflați $x,y\in\mathbb{R}$ pentru care $E(x,y)=7$.

46. ***a)*** Aduceți la o formă mai simplă suma algebrică:

$$S=4\cdot\left(x-\frac{1+z}{2}\right)^2+(x-y)^2+(z-3y)^2+\sqrt{1004004}.$$

b) Determinați valoarea minimă a expresiei:

$$E(x,y,z)=5x^2+10y^2+2z^2-2xy-4xz-6yz-4x+2z+1012$$

și valorile reale ale lui x, y și z pentru care se realizează acest minim.

Scanned with OKEN Scanner

47. Fie expresia $E(x)=(4x+3)^2+\dfrac{8x^2-50x-42}{x-7}+1$.

a) Simplificaţi fracţia $\dfrac{8x^2-50x-42}{x-7}$.

b) Arătaţi că $E(n)$ este pătrat perfect, pentru orice $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 8$.

c) Determinaţi cel mai mic număr natural x pentru care $E(x)$ se divide la 100.

d) Calculaţi suma $S=F(0)+F(1)+\ldots+F(100)$, unde $F(x)=\dfrac{x+1}{(x+2)E(x)}$.

48. Fie $a,x,y\in\mathbb{R}^*$ astfel încât $x=\dfrac{a}{a^2+a+1}$ şi $y=\dfrac{a}{a^2-a+1}$.

a) Calculaţi suma $x+y$;

b) Calculaţi expresia $a+\dfrac{1}{a}$ în funcţie de x şi apoi în funcţie de y.

c) Arătaţi că $\forall x,y\in\mathbb{R}^*$ are loc relaţia $\left(\dfrac{1}{x}-1\right)\cdot\left(\dfrac{1}{y}+1\right)\geq 4$.

49. Se dă expresia $E(x)=\left(\dfrac{3}{4x+5}-\dfrac{5}{4x-5}+\dfrac{2x+3}{16x^2-25}\right):\dfrac{-6x-37}{16x^2+40x+25}+2$.

a) Determinaţi valorile lui x pentru care expresia nu are valoarea definită.

b) Aduceţi expresia la forma cea mai simplă;

c) Determinaţi valorile întregi ale lui x pentru care $E(x)$ este număr natural.

d) Rezolvaţi ecuaţia $E(x)=8-\dfrac{3}{4x-5}$.

50. Pentru fiecare $a\in\mathbb{Q}$, $0\leq a\leq\dfrac{1}{3}$, se notează $A_a=\left\{x\in\mathbb{R}\;\middle|\;\dfrac{x^2}{x^4+x^2+1}=a\right\}$.

Dacă $E(x)=\dfrac{x^4}{x^8+x^4+1}$, arătaţi că $E(x)\in\mathbb{Q}$, pentru orice $x\in A_a$.

51. Se consideră numerele reale pozitive a, b şi c. Arătaţi că

$$\frac{3}{a+b+c}\leq\frac{1}{ax+b+c}+\frac{1}{a+bx+c}+\frac{1}{a+b+cx}\leq\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a},$$

oricare ar fi $x\in[0;1]$.

52. *a)* Se consideră numerele reale pozitive a şi b. Arătaţi că $\dfrac{(a+b)^2}{(a+b)^2-ab}\leq\dfrac{4}{3}$;

b) Arătaţi că $\sqrt{x^2+xy+y^2}+\sqrt{y^2+yz+z^2}+\sqrt{z^2+zx+x^2}\geq\sqrt{3}\cdot(x+y+z)$, oricare ar fi numerele reale pozitive x, y şi z.

53. Se consideră numerele $a=\dfrac{x}{x^2+x+1}$ şi $b=\dfrac{x^4-x^2-1}{x^2}$, unde $x\in\mathbb{R}-\{0\}$.

Ştiind că numerele a şi b sunt raţionale, arătaţi că x este număr raţional.

Scanned with OKEN Scanner

E TESTE DE EVALUARE

Testul 1

1. Se consideră expresiile: $E(x)=\dfrac{x^2}{x^2+1}$ şi $F(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$, unde $x\in\mathbb{R}$.

(1p) *a)* Arătaţi că $F(-2)=E\left(-\dfrac{1}{2}\right)$.

(1p) *b)* Verificaţi dacă $F(a)=E\left(\dfrac{1}{a}\right)$, oricare ar fi $a\in\mathbb{R}^*$.

(1p) *c)* Arătaţi că, oricare ar fi $x\in\mathbb{R}$, expresia $E(x)+F(x)$ are aceeaşi valoare.

(1p) *d)* Arătaţi că, oricare ar fi $b\in\mathbb{R}$, dacă $E(b)>\dfrac{1}{2}$, atunci $F(b)<\dfrac{1}{2}$.

(1p) *e)* Determinaţi numerele $x\in\mathbb{R}$ pentru care $E(x)-F(x)=0$.

2. Se consideră expresiile $E(x)=x+1+\dfrac{1}{x-1}$ şi $F(x)=x-1+\dfrac{1}{x+1}$, unde $x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$.

(1p) *a)* Arătaţi că $E\left(\sqrt{2}\right)=2\sqrt{2}+2$.

(1p) *b)* Verificaţi dacă $E\left(\sqrt{2}\right)=-F\left(-\sqrt{2}\right)$.

(1p) *c)* Arătaţi că $E(a)+F(-a)=0$, oricare ar fi $a\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$.

(1p) *d)* Arătaţi că, dacă $b\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$, $b>1$, atunci $\dfrac{F(b)}{E(b)}\in(0;1)$.

Notă: Timp de lucru 45 minute. Se acordă 1 punct din oficiu.

Testul 2

1. Se consideră expresiile: $E(x)=\dfrac{2x}{1+x^2}$ şi $F(x)=\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$, unde $x\in\mathbb{R}$.

(1p) *a)* Calculaţi $E\left(-\sqrt{3}\right)$.

(1p) *b)* Arătaţi că $F(x)=1-\dfrac{2x^2}{1+x^2}$, oricare ar fi $x\in\mathbb{R}$.

(1p) *c)* Deduceţi că $F(x)\in(-\infty;1]$, oricare ar fi $x\in\mathbb{R}$.

(1p) *d)* Arătaţi că $\left[E(x)\right]^2+\left[F(x)\right]^2=1$, oricare ar fi $x\in\mathbb{R}$.

(1p) *e)* Deduceţi că $\left|E(x)\right|\le 1$, oricare ar fi $x\in\mathbb{R}$.

Scanned with OKEN Scanner

2. Se consideră expresia $E(x)=\dfrac{x^4+4}{(x+1)^2+1}$, unde $x\in\mathbb{R}$.

(1p) ***a)*** Calculați $E(-1)$;

(1p) ***b)*** Simplificați expresia $E(x)$;

(1p) ***c)*** Determinați valoarea minimă a expresiei $E(x)$, unde $x\in\mathbb{R}$;

(1p) ***d)*** Arătați că, oricare ar fi $m\in\mathbb{Z}$, $E(m)-m$ este număr natural par.

Notă: Timp de lucru 45 minute. Se acordă 1 punct din oficiu.

Testul 3

1. Se consideră expresiile: $E(x)=\dfrac{1}{x(x+1)}$, unde $x\in\mathbb{N}^*$.

(1p) ***a)*** Calculați $E(2)$;

(1p) ***b)*** Arătați că $E(x)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x+1}$, oricare ar fi $x\in\mathbb{N}^*$.

(1p) ***c)*** Calculați $E(1)+E(2)+E(3)+...+E(10)$.

(1p) ***d)*** Arătați că, pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$, numărul $\dfrac{n^2+5n+6}{E(n)}$ este număr natural divizibil cu 24.

(1p) ***e)*** Arătați că $(n^2+5n+6)\cdot E(n)\le 6$, oricare ar fi $n\in\mathbb{N}^*$.

2. Se consideră expresia $E(x)=\dfrac{x^4+x^2+1}{(x+1)^2-x}$, unde $x\in\mathbb{R}$.

(1p) ***a)*** Calculați $E\left(-\dfrac{1}{2}\right)$.

(1p) ***b)*** Arătați că $(x+1)^2>x$, oricare ar fi $x\in\mathbb{R}$.

(1p) ***c)*** Simplificați expresia $E(x)$.

(1p) ***d)*** Arătați că $E(n)$ este număr natural impar, oricare ar fi $n\in\mathbb{N}$.

Notă: Timp de lucru 45 minute. Se acordă 1 punct din oficiu.

Scanned with OKEN Scanner

Fişă pentru portofoliul individual

Numele şi prenumele: _____

Clasa a VIII-a ____

A4

Tema nr. I.4: **Rapoarte de numere reale reprezentate prin litere. Amplificarea şi simplificarea rapoartelor. Operaţii cu rapoarte de numere reale reprezentate prin litere**

(1,5p) 1. Completaţi spaţiile punctate astfel încât să obţineţi afirmaţii adevărate:

a) Prin simplificarea raportului $\frac{4x^2+8x}{4x}$ se obţine .....

b) Fracţia $\frac{4}{x-2}$ nu este definită dacă x are valoarea....

c) Pentru $x \neq 0$, rezultatul calculului $\frac{x-2}{3x}+\frac{4}{3x}$ este....

(1,5p) 2. Pentru fiecare dintre enunţurile următoare, dacă enunţul este adevărat, încercuiţi litera „A", în caz contrar încercuiţi litera „F":

a) Pentru $x=1$, valoarea fracţiei $\frac{x+4}{2x+3}$ este 1. **A** **F**

b) Rezultatul calculului $\left(\frac{x^2}{2y}\right)^2 : \frac{x^3}{4y^2}$ este 1. **A** **F**

c) Fracţia $\frac{x+1}{x+2}$ este ireductibilă, pentru orice $x \in \mathbb{R}$. **A** **F**

(2p) 3. Încercuiţi răspunsul corect la fiecare dintre următoarele exerciţii. Dintre cele patru variante de răspuns ale fiecărei cerinţă, doar una este corectă.

a) Simplificând raportul $\frac{x^2-10x+25}{x^2-25}$ prin $x-5$ se obţine:

A. $\frac{x+5}{x-5}$ **B.** $\frac{x-5}{x+5}$ **C.** $\frac{x-25}{x+5}$ **D.** 1

b) Calculând $\left(-\frac{x^2}{y^4}\right):\left(-\frac{x^4}{y^2}\right)$, unde $x, y \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$, $y \neq 0$, se obţine:

A. $\frac{x^2}{y^2}$ **B.** $\frac{1}{x^2y^2}$ **C.** $\frac{y^2}{x^2}$ **D.** x^2y^2

c) Dacă $\frac{2x+y}{3x-y}=\frac{2}{3}$, atunci numărul y este egal cu:

A. 5 **B.** $-\frac{2}{3}$ **C.** 0 **D.** $-\frac{3}{2}$

d) Fie $a \in \mathbb{R}^*$ şi $x=a^2+a$, $y=a-1$ şi $z=a^2-1$. Atunci $\frac{x \cdot y}{z}$ este:

A. a^2 **B.** a **C.** $a+1$ **D.** 1

Scanned with OKEN Scanner

La următorul subiect scrieți pe fișa de evaluare rezolvările complete.

(3p) 4. Se dă expresia $E(x)=\left(\frac{x-6}{x^2-25}-\frac{x}{5-x}-\frac{2}{x+5}\right):\frac{2x^2+x-6}{x^2-25}$, unde $x\in\mathbb{R}-\left\{-5;-2;\frac{3}{2};5\right\}$.

a) Arătați că $(x+2)(2x-3)=2x^2+x-6$, oricare $x\in\mathbb{Z}$.

b) Arătați că $E(x)=\frac{x+2}{2x-3}$, oricare $x\in\mathbb{Z}\setminus\left\{-5;-2;\frac{3}{2};5\right\}$.

c) Aflați valorile întregi ale lui a pentru care $E(a)\in\mathbb{Z}$.

NOTĂ: Timp de lucru 50 minute. Se acordă un punct din oficiu.

Scanned with OKEN Scanner

1.12. Probleme cu caracter aplicativ

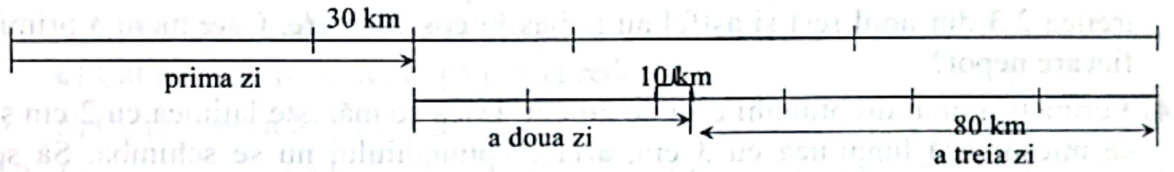
Rezolvarea problemelor cu ajutorul ecuațiilor presupune parcurgerea următoarelor etape:

1. stabilirea necunoscutei (necunoscutelor) problemei, notarea acesteia (acestora);
2. scrierea datelor și relațiilor din problemă, obținându-se, astfel, modelul matematic (ecuație sau sistem) al problemei;
3. rezolvarea ecuației sau sistemului obținut;
4. interpretarea soluției și formularea răspunsului la problemă.

Exemple.

Problemă: Un călător a parcurs, în prima zi, 1/4 din întregul drum și încă 30 km. A doua zi a parcurs 2/5 din rest și încă 10 km. Care este lungimea drumului, dacă pentru a treia zi i-au mai rămas 80 km?

Rezolvarea aritmetică. Folosim *metoda mersului invers* combinată cu *metoda grafică*. Reprezentăm, printr-un segment, întregul drum:



$10 + 80 = 90$ km înseamnă $\frac{3}{5}$ din primul rest (drumul rămas după prima zi);

$90 : 3 \cdot 5 = 150$ km este primul rest;

$(150 + 30) : 3 \cdot 4 = 240$ km este lungimea întregului drum.

Rezolvarea algebrică.

1. Notăm cu x lungimea întregului drum.
2. În prima zi s-a parcurs $\frac{1}{4}x+30$. A rămas $x-\left(\frac{1}{4}x+30\right)=\frac{3}{4}x-30$ (primul rest).

   $\frac{2}{5}\left(\frac{3}{4}x-30\right)+10=\frac{3}{10}x-2$ este distanța parcursă a doua zi.
3. Se obține ecuația: $\frac{1}{4}x+30+\frac{3}{10}x-2+80=x$ cu soluția $x = 240$.
4. Lungimea întregului drum este de 240 km.

Problemă: Într-un bloc sunt numai apartamente cu 2 camere și apartamente cu 3 camere fiecare. În total sunt 25 de apartamente care au toate 60 camere. Câte apartamente de fiecare fel sunt în bloc?

Rezolvare aritmetică. Folosim *metoda falsei ipoteze*. Presupunem că în bloc sunt numai apartamente cu câte 3 camere. Atunci $3 \cdot 25 = 75$ ar fi numărul de camere. Diferența totală este $75 - 60 = 15$ camere, iar diferența unitară este $3 - 2 = 1$ cameră. Așadar, sunt $15 : 1 = 15$ apartamente cu două camere și $25 - 15 = 10$ apartamente cu trei camere în blocul respectiv.

Scanned with OKEN Scanner

Rezolvare algebrică.

1. Notăm cu x numărul apartamentelor cu câte 2 camere.

2. Rezultă că vor fi $25-x$ apartamente cu 3 camere.

3. Obținem ecuația: $2x+3(25-x)=60$ cu soluția $x=15$.

4. Sunt 15 apartamente cu câte 2 camere și $25 - 15 = 10$ apartamente cu câte 3 camere fiecare.

Proba: $15 + 10 = 25$ apartamente și $2 \cdot 15 + 3 \cdot 10 = 60$ camere în total.

---

*

1. Marius a cumpărat un creion și o carte pe care a plătit suma de 4,8 lei. Știind că prețul cărții este de trei ori mai mare decât prețul creionului, determinați prețul fiecăruia.

2. Suma a două numere este 44, iar diferența lor 12. Care sunt numerele?

3. La bunica au sosit pe rând trei nepoți. Primului i-a dat 1/4 din numărul de mere dintr-un coș, la al doilea 1/4 din numărul merelor rămase în coș, iar la al treilea 2/3 din noul rest și astfel au rămas în coș 12 mere. Câte mere a primit fiecare nepot?

4. Perimetrul unui dreptunghi este de 26 cm. Dacă se mărește lățimea cu 2 cm și se micșorează lungimea cu 3 cm, aria dreptunghiului nu se schimbă. Să se calculeze aria dreptunghiului.

5. Suma a două numere este 65, iar diferența dintre triplul primului și jumătatea celui de-al doilea este 48. Determinați numerele.

6. Să se determine numărul despre care știm că înmulțindu-l cu 3 se obține același rezultat ca atunci când îl adunăm cu 486.

7. În triunghiul ABC se cunosc; $m(\sphericalangle A)=2x^\circ$ și $m(\sphericalangle B)=6x^\circ$. Să se determine valorile lui x pentru care triunghiul este isoscel.

8. Un automobilist a parcurs 270 km în 5 ore mergând, în medie, cu viteza de 50 km/h în localități și 60 km/h în afara localităților. Câți kilometri a parcurs în afara localităților?

9. Cu o cantitate de morcovi pot fi hrăniți 11 iepuri timp de 16 zile. Pentru câte zile ar fi necesară aceeași cantitate ca să hrănească 8 iepuri?

10. La un magazin s-a produs o reducere de prețuri cu 15%. O rochie costă după reducere 51 lei. Ce preț avea rochia înainte de reducere?

11. Radu citește o carte astfel: în prima zi 1/4 din numărul de pagini al cărții, în a doua zi 1/6 din rest, a treia zi 3/5 din noul rest, iar pentru a patra zi îi rămân de citit 42 pagini. Câte pagini are cartea pe care o citește Radu?

12. Într-un bloc sunt apartamente cu două camere și apartamente cu trei camere. Știind că în total sunt 50 de apartamente și 117 camere, să se determine câte apartamente cu două camere sunt în boc.

13. Cât la sută din media aritmetică a numerelor 46, 23 și 51 este numărul 6?

Scanned with OKEN Scanner

14. Dacă într-o sală de clasă se așază câte 3 elevi într-o bancă, rămân 3 bănci goale, iar dacă se așază câte 2 elevi într-o bancă rămân 5 elevi în picioare. Câți elevi și câte bănci sunt în clasă?

15. În clasa a VIII-a a unei școli numărul băieților este cu 7 mai mare decât numărul fetelor. Dacă din clasă ar pleca 3 fete și ar veni 3 băieți atunci ar fi de două ori mai mulți băieți decât fete. Câți elevi sunt în clasă?

16. Trei elevi au împreună 3200 lei. După ce primul a cheltuit 1/3 din partea sa, al doilea 1/4 din partea sa, iar al treilea 3/5 din partea sa, au rămas toți cu sume egale de bani.

a) Ce sumă a avut la început fiecare? *b*) Ce sumă a cheltuit fiecare?

17. La un concurs de tir numărul armelor reprezintă $\frac{2}{11}$ din numărul concurenților. Știind că suma dintre numărul concurenților și numărul armelor este 156, iar $\frac{1}{12}$ dintre concurenți au fost premiați să se determine numărul de concurenți care au fost premiați.

18. Un palton costă 400 lei. După două reduceri de preț paltonul a fost vândut cu 306 lei. Prima reducere a fost de 15%.

a) Cât a costat paltonul după prima reducere?

b) Ce procent a fost a doua reducere?

19. La un concurs Andrei, pentru 8 răspunsuri a primit 38 puncte. Să se calculeze câre răspunsuri au fost corecte știind că pentru fiecare răspuns corect se acordă câte 10 puncte, iar pentru fiecare răspuns greșit se pierd 4 puncte.

20. Adunând de cinci ori pătratul unui număr natural cu acel număr mărit de 7 ori se obține suma 34. Care este numărul?

21. Pentru 2 kg morcovi și 3 kg roșii s-a plătit suma de 15,5 lei, iar pentru 1 kg morcovi și 4 kg roșii s-a plătit suma de 16,5 lei. Cât costă 1 kg de morcovi și cât costă 1 kg de roșii?

22. 13 muncitori pot termina o lucrare în 18 zile. Știind că după 4 zile 6 muncitori au plecat pe alt șantier, să se afle în câte zile este terminată lucrarea de către muncitorii rămași.

23. Se știe că: două creioane și două radiere costă 7 lei; trei radiere și trei pixuri costă 18 lei, iar cinci creioane și cinci pixuri costă 32,5 lei. Cât costă un creion, două radiere și trei pixuri la un loc?

24. Trei copii au fiecare câte o sumă de bani. Primul și al doilea au împreună 395 lei, al doilea și al treilea au împreună 355 lei, iar primul și al treilea au împreună 326 lei. Câți lei are fiecare?

25. Determinați două numere întregi a căror sumă este 28, iar diferența pătratelor lor este de 168.

26. Diferența dintre triplul pătratului unui număr natural și acel număr mărit de 20 ori este egală cu 7. Determinați numărul.

Scanned with OKEN Scanner

1.13. Probleme pentru performanță școlară și olimpiade

1. Calculați:

a) $\sqrt{0,1}\cdot\sqrt{15}:\sqrt{18}:\sqrt{3}$;

b) $\left[\left(\sqrt{2}+1\right)^{2006}+\left(\sqrt{2}-1\right)^{-2006}\right]:\left(\sqrt{2}+1\right)^{2005}$;

c) $\sqrt{\frac{2}{1}+\frac{3}{2}+\frac{4}{3}+\ldots+\frac{65}{64}-\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{64}\right)}$.

2. Fie $a,b\in\mathbb{N}^*$ astfel încât $\frac{a}{b}+\frac{a+1}{b+1}+\frac{a+2}{b+2}+\ldots+\frac{a+2007}{b+2007}=2008$.

Arătați că $n=\sqrt{\frac{(a+b+2)^{2007}}{(a+1)^{2007}+(b+1)^{2007}}}\in\mathbb{N}$.

3. Dacă $n\in\mathbb{N}$, arătați că $S=1-\frac{3}{1^2\cdot2^2}-\frac{5}{2^2\cdot3^2}-\frac{7}{3^2\cdot4^2}-\ldots-\frac{2n+1}{n^2\cdot(n+1)^2}>0$.

4. Fie $E=n^2m+nm^2+n^2+m^2+2nm+n+m$. Arătați că $E\vdots2$, oricare ar fi numerele naturale m și n.

5. Calculați produsul abc știind că $\left|3a-\frac{1}{4}\right|+|b+6|+|c+3|=0$.

6. Arătați că, pentru orice $n\in\mathbb{N}$, numărul $y=\sqrt{5n(n+1)+7}$ este irațional.

7. Fie expresia: $E(x)=\sqrt{1-6x+9x^2}-\sqrt{4x^2-4x+1}$. Calculați $E(-2006)$.

8. Fie $a=\sqrt{7-4\sqrt{3}}-\sqrt{7+4\sqrt{3}}$. Calculați: *a)* a^2; *b)* $b=\left(1+a+2\sqrt{3}\right)^{2006}$.

c) Arătați că $\left(\sqrt{7-4\sqrt{3}}\right)^x+\left(\sqrt{7+4\sqrt{3}}\right)^x\geq2$, oricare ar fi $x\in\mathbb{Z}$.

9. Fie $E=\frac{2a-b}{1+2b}$, cu $a=\sqrt{3-\sqrt{5}+\sqrt{9-4\sqrt{5}}}$ și $b=\sqrt{\sqrt{7}-1-\sqrt{11-4\sqrt{7}}}$. Să se arate că $E\in\mathbb{Q}$.

10. *a)* Calculați raportul $\frac{N}{A}$, unde: $N=\sqrt{6-2\sqrt{4+2\sqrt{3}}}+\sqrt{7-4\sqrt{3}}$ și

$A=\frac{0,01+0,02+0,03+\ldots+0,98+0,99}{\sqrt{27+10\sqrt{2}}+\sqrt{27-10\sqrt{2}}}$.

b) Arătați că expresia $E=\frac{(n-3)(n^2+2)}{(n+6)(n^2+11)}$ este reductibilă cu 6, oricare ar fi numărul întreg n, $n\neq-6$.

Scanned with OKEN Scanner

11. Se dă $E(x,y)=\sqrt{x+y+54xy}$. Calculați $E\left(a;\frac{1}{a}\right)$, unde $a=\frac{2\sqrt{3}-\sqrt{11}}{2\sqrt{3}+\sqrt{11}}$.

12. Arătați că:

a) $\frac{3}{\sqrt{n(n+3)}\left(\sqrt{n}+\sqrt{n+3}\right)}=\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+3}}$, oricare ar fi $n\in\mathbb{N}^*$;

b) $x=\frac{3}{\sqrt{1\cdot4}\left(\sqrt{1}+\sqrt{4}\right)}+\frac{3}{\sqrt{4\cdot7}\left(\sqrt{4}+\sqrt{7}\right)}+...+\frac{3}{\sqrt{166\cdot169}\left(\sqrt{166}+\sqrt{169}\right)}\in\mathbb{Q}$.

13. *a)* Calculați: $S=\frac{1}{1\cdot\sqrt{2}+2\cdot\sqrt{1}}+\frac{1}{2\cdot\sqrt{3}+3\cdot\sqrt{2}}+...+\frac{1}{n\cdot\sqrt{n+1}+(n+1)\cdot\sqrt{n}}$.

b) Arătați că, dacă $n\in\mathbb{N}^*$, atunci $\sqrt{1\cdot2}+\sqrt{2\cdot3}+...+\sqrt{n(n+1)}<n(n+1)$.

14. Determinați numerele naturale a pentru care $\frac{2a-3}{4}\in\left(\frac{a-2}{3},\frac{a+4}{7}\right)$.

15. Calculați ab știind că $a^2+b^2=2$ și $(a-b)^4-(a+b)^4=8$.

16. Fie $x,y\in\mathbb{R}$ astfel încât $x^2+y^2-3(x-y)+4{,}25=0$. Arătați că:

a) $|x+y|\le1$; *b)* $|x^3+y^3|\le7$.

17. Calculați produsul numerelor x și y știind că $x^2+4y^2+4y-4x\sqrt{2}+9=0$.

18. Fie $x,y\in\mathbb{R}$ astfel încât $x(3-2x)+y(3-2y)=2xy$. Arătați că $0\le x+y\le2$.

19. Fie $x,y,z>0$. Arătați că

$$x^3+y^3+z^3=\sqrt{2}\left(\frac{x^2y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}+\frac{y^2z^2}{\sqrt{y^2+z^2}}+\frac{x^2z^2}{\sqrt{x^2+z^2}}\right)$$

dacă și numai dacă $x=y=z$.

20. Se consideră expresia $E(x;y)=(x+y)^2-2(x+y+xy)+18$.

a) Pentru ce valori ale lui x și y valoarea numerică a expresiei este minimă?

b) Aflați valoarea numerică a expresiei $E(x;y)$ știind că numerele x și y verifică egalitatea $|x-2|+|y-2|=2xy-x^2-y^2$.

21. Dacă $a,b,c\in(0,\infty)$, arătați că:

a) $\frac{a^2}{b}\ge2a-b$; *b)* $\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}\ge a+b+c$;

c) $\left(a^3c+b^3a+c^3b\right)^2\ge3a^2b^2c^2(ab+bc+ca)$.

22. Fie numerele reale $x,y,z\in[2,3]$. Să se arate că:

a) $(2x-3y)(3x-2y)\le0$; *b)* $8\le(x+y)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{z}{xy}\right)\le\frac{27}{2}$.

Scanned with OKEN Scanner

23. ***a)*** Arătați că $(x|y|-y|x|)(y|z|-z|y|)(x|z|-z|x|)=0$, pentru orice $x,y,z\in\mathbb{R}$.

b) Determinați două numere întregi x și y cuprinse între 10 și 100, unde y este numărul obținut prin inversarea cifrelor lui x și $x^2-y^2=495$.

24. ***a)*** Rezolvați în $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ ecuația: $x^2y-xy^2-3xy-4x+4y+12=0$.

b) Aflați minimul expresiei: $E(x)=\dfrac{x^2-4x-4}{x^2-4x+8}$, $x\in\mathbb{R}$.

25. Demonstrați că: $\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{\sqrt{7}}+\dfrac{\sqrt{7}+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}+\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{7}}{\sqrt{3}}>6.$

26. Arătați că: ***a)*** $\left(2\sqrt{5}-3+\dfrac{1}{2\sqrt{5}+3}\right)^2:\left(\dfrac{1001}{20\sqrt{5}+30}\right)^2>\dfrac{1}{81}$;

b) $\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{2}\le\sqrt{\dfrac{x+y}{2}}$, pentru oricare numere reale pozitive x și y;

c) $\sqrt{2000}+\sqrt{2001}+\sqrt{2002}+...+\sqrt{2006}<7\sqrt{2003}$.

27. ***a)*** Dacă $a=1+2\sqrt{3}$ și $b=1-2\sqrt{3}$, arătați că numerele $a+b$, $a\cdot b$, a^3+b^3 sunt raționale.

b) Fie a *și* b două numere raționale nenule astfel încât $a+b\in\mathbb{Q}$ și $a\cdot b\in\mathbb{Q}^*$. Demonstrați că $\dfrac{1}{a^3}+\dfrac{1}{b^3}\in\mathbb{Q}$.

28. Să se arate ca pentru orice numere naturale m și n cu $m+n\neq0$, numărul $a=\dfrac{m\sqrt{2}+n\sqrt{5}}{m+n}$ este irațional și $\sqrt{2}\le a\le\sqrt{5}$.

29. Aflați numerele întregi m și n, dacă: $\dfrac{m}{\sqrt{2(2+\sqrt{3})}}+\dfrac{n}{\sqrt{2(2-\sqrt{3})}}=\sqrt{19-8\sqrt{3}}$.

30. ***a)*** Numerele reale a, b și c verifică relațiile $4c^2-9a^4-a^2b^2+6a^3b=18$ și $3a^2-ab-2c^2=6$. Calculați $2c^2+3a^2-ab$.

b) Aduceți la forma cea mai simplă expresia:

$$S=\frac{1}{\sqrt{3+2\sqrt{2}}}+\frac{1}{\sqrt{5+2\sqrt{6}}}+...+\frac{1}{\sqrt{4011+2\sqrt{2005\cdot2006}}}.$$

31. Determinați a, b știind că există numerele reale x și y astfel încât $\sqrt{x^2+y^2-2ax-2y+a^2+5}+\sqrt{x^2+y^2-4x-2by+b^2+5}=3$.

32. ***a)*** Fie $y\in\mathbb{R}$ astfel ca $x^3-1=y(x-1)$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$. Arătați că $y>0$.

Scanned with OKEN Scanner

b) Aflați valoarea reală a numărului $E=x^4+x^3+x^2+x+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}+\frac{1}{x^4}$ știind că $\left(x-\frac{1}{x}\right)^3=64$.

33. Fie $a,b\in\mathbb{R}$ astfel încât $a^2+b^2=2$. Aflați cea mai mare valoare a produsului $a\cdot b\cdot(a+b)$.

34. Fie $m,n\in\mathbb{N}^*$, $m>1$. Să se arate că numărul m^4+4n^4 nu este prim.

35. Numerele a, b și c sunt pozitive și $a+b+c=1$.

Demonstrați că $\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{a+c}\geq 4{,}5$.

36. Fie x, y și z numere reale astfel încât $y^2-6x=7$, $10y-z^2=1$ și $14z-x^2=89$. Demonstrați că $x=3$, $y=5$, $z=7$.

37. Determinați $a,b,c\in\mathbb{R}$ știind că au loc simultan relațiile: $a-b^2\geq\frac{1}{4}$, $b-c^2\geq\frac{1}{4}$, $c-a^2\geq\frac{1}{4}$.

38. Fie $a,b\in\mathbb{R}$ astfel încât $a^2+b^2-3a-5b+\frac{33}{4}=0$. Arătați că $4\leq a+b+1\leq 6$.

39. Într-o clasă sunt 20 de elevi. De „Sf. Valentin", fiecare fată oferă fiecărui băiat trei flori și fiecărei fete o floare, iar fiecare băiat oferă câte trei flori fiecărei fete și câte o floare fiecărui băiat.

a) Arătați că numărul maxim de flori oferite este 780.

b) Câte fete ar trebui să fie în clasă, astfel încât să fie oferite exact 780 de flori?

40. *a)* Arătați că $x^2+y^2+z^2\geq xy+yz+zx$, oricare ar fi numerele reale x, y și z;

b) Aflați numerele $x, y, z\in\mathbb{R}$ care verifică simultan egalitățile $x+y+z=1$ și $x^2y^2+x^2z^2+y^2z^2=xyz$.

41. *a)* Dacă $a,b,c\in\mathbb{R}$ și $a+b+c=0$, arătați că $a^3+b^3+c^3=3abc$.

b) Numerele reale pozitive a și b verifică relația: $\frac{a+b}{2}+\sqrt{ab}=\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}+\frac{2ab}{a+b}$.

Arătați că $a=b$.

42. Fie a și b două numere raționale diferite, $a\geq 0$. Considerăm mulțimea $A=\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5\}$, unde $x_1=a$, $x_2=b$ și $x_{n+1}=\frac{(n+2)\cdot x_n+n\cdot x_{n+2}}{(n+2)+n}$, oricare ar fi $n\in\{1;2;3\}$.

a) Exprimați, în funcție de a și b, elementele mulțimii A;

b) Dacă $A-\{a,b\}\subset\mathbb{N}$ și $b<1$, determinați numărul a.

Scanned with OKEN Scanner

GEOMETRIE

CAPITOLUL 2

Corpuri geometrice

2.1. Puncte, drepte, plane
2.2. Piramida
2.3. Prisma
Teste de evaluare
2.4. Poziţiile relative a două drepte în spaţiu
2.5. Unghiul a două drepte în spaţiu. Drepte perpendiculare
Teste de evaluare
2.6. Poziţiile relative ale unei drepte faţă de un plan
2.7. Dreaptă perpendiculară pe plan. Distanţa de la un punct la un plan. Înălţimea unei piramide
Teste de evaluare
2.8. Poziţiile relative a două şi trei plane. Plane paralele. Teoreme de paralelism
2.9. Secţiuni paralele cu baza în corpurile studiate. Trunchiul de piramidă
Teste de evaluare
2.10. Probleme cu caracter aplicativ
2.11. Probleme pentru performanţă şcolară şi olimpiade

Scanned with OKEN Scanner

CAPITOLUL 2

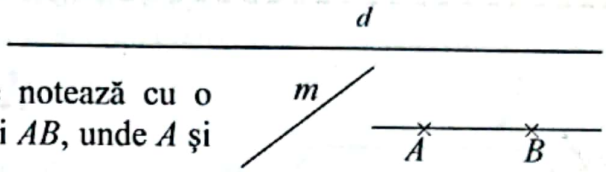
Corpuri geometrice

2.1. Puncte, drepte, plane

Elementele fundamentale ale geometriei în spațiu sunt: *punctul*, *dreapta*, *planul*. Acestea nu se definesc, dar pot fi descrise.

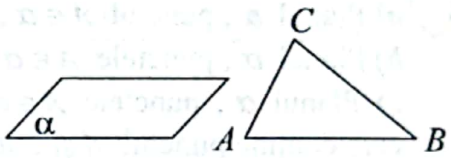
Punctul este cea mai simplă figură geometrică. El se marchează cu • sau × și se notează : • A sau • B sau × C.

Dreapta este formată din puncte.



Dreapta este *nemărginită* (infinită) . Se notează cu o literă mică d sau m,sau cu două litere mari AB, unde A și B sunt două puncte ale acestei drepte.

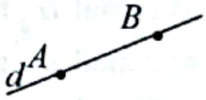
Planul. Planul este nelimitat în toate direcțiile. În geometrie vom reprezenta porțiuni de plane prin câte un paralelogram sau triunghi.



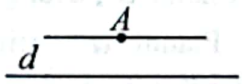
Se notează cu o literă grecească α, β, γ, π etc., sau prin trei litere mari puse în paranteză rotundă (ABC) unde A, B și C sunt trei puncte necoliniare ale acelui plan.

Propoziții despre elementele fundamentale ale geometriei în spațiu

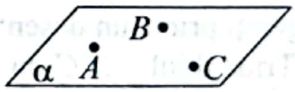
1. Prin două puncte distincte A și B trece o dreaptă și numai una. Notăm $d = AB$.



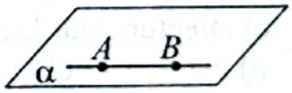
2. Într-un plan, printr-un punct exterior unei drepte, se poate duce o paralelă și numai una la dreapta dată.



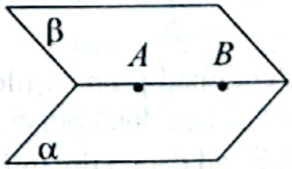
3. Există un plan și numai unul care conține trei puncte necoliniare A, B și C. Notăm $\alpha = (ABC)$.



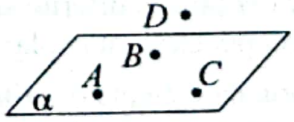
4. Dacă două puncte distincte A și B ale unei drepte aparțin unui plan α , atunci dreapta are toate punctele conținute în acel plan. Notăm $AB \subset \alpha$.



5. Dacă două plane distincte α și β au un punct comun A, atunci ele mai au cel puțin încă un punct comun B (adică planele au comun dreapta AB). Notăm $AB \subset \alpha \cap \beta$.



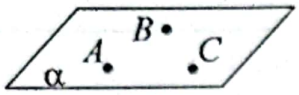
6. Există patru puncte nesituate în același plan. Punctele A, B, C și D sunt *necoplanare*.



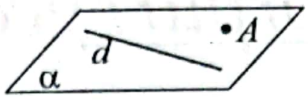
Determinarea planului. Un plan este *unic determinat* de:

Scanned with OKEN Scanner

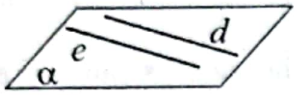
A. trei puncte necoliniare
Notăm $\alpha = (ABC)$.



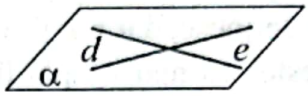
B. o dreaptă și un punct exterior;
Notăm $\alpha = (d; A)$



C. două drepte paralele;
Notăm $\alpha = (d; e)$.



D. două drepte concurente;
Notăm $\alpha = (d; e)$.



---

*

1. Reprezentați printr-un desen:
a) Planul α, punctul $A \in \alpha$, punctul $B \notin \alpha$ și dreapta AB;
b) Planul α, punctele $A \in \alpha$, $B \in \alpha$, $C \notin \alpha$ și triunghiul ABC;
c) Planul α, punctele $A \in \alpha$, $B \in \alpha$, dreapta AB, punctul $M \notin \alpha$ și dreapta d care conține punctul M și este paralelă cu dreapta AB;
d) Planul α, punctele $B \notin \alpha$ și $C \notin \alpha$ situate de o parte și de alta a planului α și dreapta AB.

2. Sugerați printr-un desen:
a) Planul α, triunghiul ABC cu $[AC] \subset \alpha$ și $B \notin \alpha$, iar $AB = AC$;
b) Planul α, triunghiul ABC cu $[BC] \subset \alpha$ și $A \notin \alpha$, iar $m(\sphericalangle ABC) = 90°$;
c) Planul α, triunghiul echilateral ABC cu $[BA] \subset \alpha$ și $C \notin \alpha$;
d) Planul α, triunghiul ABC cu $A \in \alpha$, $B \notin \alpha$, $C \notin \alpha$, $AB = AC$, iar $m(\sphericalangle BAC) = 90°$.

3. Sugerați printr-un desen:
a) Triunghiul ABC cu $AB = AC$ și triunghiul echilateral BCD situate în plane diferite;
b) Paralelogramul $ABCD$ și triunghiul isoscel ABE cu $m(\sphericalangle ABE) = 90°$;
c) Dreptunghiurile $ABCD$ și $BCDE$ situate în plane diferite;
d) Pătratul $ABCD$ și trapezul $CDEF$ cu $CD \parallel EF$, situate în plane diferite;
e) Triunghiurile ABC și ADE situate în plane diferite care au mediana $[AM]$ comună.

4. Menționați propozițiile adevărate:
a) Oricare două puncte sunt coliniare.
b) Fiind dată o dreaptă d, există un plan α astfel încât $d \subset \alpha$.
c) Oricare trei puncte diferite sunt coplanare.
d) Dacă trei puncte sunt coplanare, atunci ele sunt coliniare.

5. Stabiliți prin câte drepte diferite pot fi unite, două câte două:
a) trei puncte diferite necoliniare;

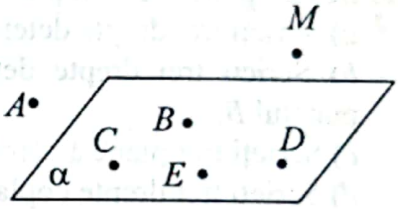
Scanned with OKEN Scanner

b) trei puncte diferite coliniare;
c) patru puncte diferite necoliniare oricare trei dintre ele;
d) patru puncte diferite din care numai trei sunt coliniare.

6. Stabiliți câte drepte se pot desena prin perechi de puncte formate din punctele diferite M, N, P, Q, dacă:
a) M, N și P sunt coliniare;
b) nu există trei puncte dintre ele care să fie coliniare;
c) punctele nu sunt coplanare.

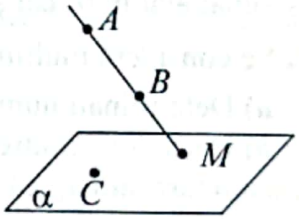
7. Stabiliți câte plane diferite sunt determinate de câte trei din:
a) patru puncte necoplanare;
b) cinci puncte necoplanare oricare patru dintre ele;
c) cinci puncte dintre care numai patru sunt coplanare.

8. Analizați figura alăturată și stabiliți care dintre următoarele propoziții sunt adevărate:
a) $D \in \alpha$; *b)* $A \notin \alpha$; *c)* B, D, M sunt coliniare;
d) A, B, C sunt coplanare; *e)* $AE \subset \alpha$; *f)* $CE \subset \alpha$;
g) $BE \not\subset \alpha$; *h)* $EM \subset \alpha$.



9. Referitor la figura de la problema **8.**, scrieți toate dreptele determinate de câte două din cele șase puncte date.

10. În figura alăturată punctele A și B sunt puncte exterioare planului α iar $C \in \alpha$ și $AB \cap \alpha = \{M\}$.
a) Câte plane distincte determină punctele A, B, C, M?
b) Arătați că $(ABC) = (MBC)$.
c) Determinați $(ABC) \cap \alpha$.



**

11. Se consideră un punct A.
a) Câte drepte distincte conțin punctul A?
b) Câte plane distincte conțin un punctul A?
c) Dacă punctul B este diferit de A, câte plane distincte conțin punctele A și B?

12. Câte plane distincte conțin trei puncte distincte date dacă:
a) punctele sunt coliniare;
b) punctele sunt necoliniare?

13. Se consideră punctele necoplanare A, B, C și D. Numiți toate planele diferite determinate de câte trei dintre cele patru puncte.

14. Se consideră punctele A, B, C, D și E oricare patru dintre ele fiind necoplanare.
a) Arătați că, oricare trei puncte dintre cele cinci sunt necoliniare;
b) Numiți toate planele diferite determinate de câte trei dintre cele cinci puncte.

15. Se consideră punctele A, B, C, D și E. Determinați numărul de plane diferite determinate de către trei dintre cele cinci puncte. Analizați toate cazurile posibile.

Scanned with OKEN Scanner

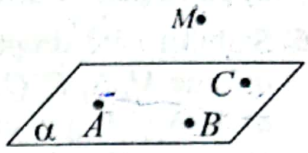
16. În figura alăturată punctele A, B și C sunt situate în planul α iar punctul M este exterior planului α. Completați spațiile punctate cu răspunsul corect.

a) $(ABM)\cap(CBM)=\ldots$; *b*) $(MAC)\cap\alpha=\ldots$;

c) $MB\cap\alpha=\ldots$; *d*) $AC\cap\alpha=\ldots$;

e) $(MAB)\cap\alpha=\ldots$; *f*) $(BAC)\cap\alpha=\ldots$;

g) $(BAC)\cup AB=\ldots$; *h*) $AM\cap\alpha=\ldots$.



17. Stabiliți numărul minim și numărul maxim de drepte prin care pot fi unite, două câte două, 6 puncte distincte.

18. Demonstrați că, dacă în spațiu trei drepte neconcurente toate trei se intersectează două câte două, atunci ele sunt coplanare.

19. Se dau punctele necoplanare A, B, C, D.

a) Scrieți trei drepte determinate de câte două din aceste puncte.

b) Scrieți trei drepte determinate de câte două din aceste puncte care conțin punctul B.

c) Scrieți trei plane a căror intersecție este punctul C.

d) Scrieți trei drepte coplanare toate trei.

e) Scrieți trei drepte coplanare două câte două, dar necoplanare toate trei.

20. Două plane distincte α și β se intersectează după dreapta AB. Punctul M este situat atât în α, cât și în β. Arătați că punctul M este situat pe dreapta AB.

21. Se consideră mulțimea de puncte $\{A,B,C,D\}$.

a) Determinați numărul de submulțimi de câte trei puncte ale mulțimii date;

b) Dacă două dintre submulțimile de trei elemente sunt formate cu puncte coliniare, arătați că punctele A, B, C și D sunt coliniare.

22. Se consideră mulțimea de puncte $\{A,B,C,D,E\}$.

a) Arătați că, dacă oricare trei puncte din cele cinci sunt coliniare, atunci toate cele cinci puncte sunt coliniare;

b) Dacă numai două submulțimi de câte trei puncte din cele cinci sunt formate cu puncte coliniare, rezultă că cele cinci puncte sunt coliniare? Justificați.

***

23. Trei vrăbii ciugulesc grăunțe de pe o suprafață plană. La un moment dat toate trei zboară în direcții diferite. După cât timp se vor afla într-un același plan?

24. Se consideră mulțimea de puncte $\{A,B,C,D,E\}$.

a) Dacă oricare submulțime de câte patru puncte din mulțimea dată este formată cu puncte coplanare, arătați că toate cele cinci puncte sunt coplanare;

b) Dacă numai două submulțimi de câte patru puncte din cele cinci sunt formate cu puncte coplanare, rezultă că cele cinci puncte sunt coliniare? Justificați.

25. Explicați o construcție a două drepte necoplanare.

Scanned with OKEN Scanner

26. Se dau punctele A, B, C, D astfel încât $[DA] \equiv [DC]$ și $m(\widehat{ADB}) = m(\widehat{BDC})$. Demonstrați că $[AB] \equiv [BC]$ în următoarele situații:

i) A, B, C și D sunt coplanare; *ii)* A, B, C și D sunt necoplanare.

27. Se dau punctele A, B și C astfel încât $AB = 7$ cm, $BC = 5$ cm și $AC = 10$ cm. Justificați că cele trei puncte determină un plan unic.

28. Se dau punctele A, B, C astfel încât $AB = 12$ cm, $BC = 5$ cm și $AC = (x+8)$ cm, unde $x > -8$. Determinați valorile lui x în cazul când punctele A, B, C nu determină un plan.

Probleme de șapte stele

29. Trapezul $ABCD$ are latura neparalelă AD inclusă în planul α. Dreapta CB intersectează planul α în punctul E.

a) Arătați că punctele E, A, D sunt coliniare;

b) Dacă $AD = 8$ cm, $AE = 24$ cm și $CE = 12$ cm, calculați BC dacă:

i) $D \in (AE)$; *ii)* $A \in (DE)$.

30. Se dau punctele necoplanare A, B, C, D și $M \in [AB]$, $N \in [CD]$. Determinați intersecția planelor (NAB) și (MDC).

31. Punctul V este exterior planului pătratului $ABCD$ în care $AC \cap BD = \{O\}$. Având în vedere această configurație,

a) Dați trei exemple de trei puncte coliniare;

b) Dați trei exemple de trei puncte necoliniare;

c) Stabiliți dacă punctele V, E, O, F sunt coplanare, unde E și F sunt mijloacele segmentelor $[AB]$ respectiv $[CD]$;

d) Dați trei exemple de patru puncte coplanare;

e) Verificați dacă este adevărată relația: $(VAC) \cap (VBD) = (VBD) \cap (VEF)$;

32. Stabiliți numărul de drepte prin care pot fi unite, două câte două, 6 puncte distincte. Luați în considerație toate configurațiile posibile.

Scanned with OKEN Scanner

2.2. Piramida

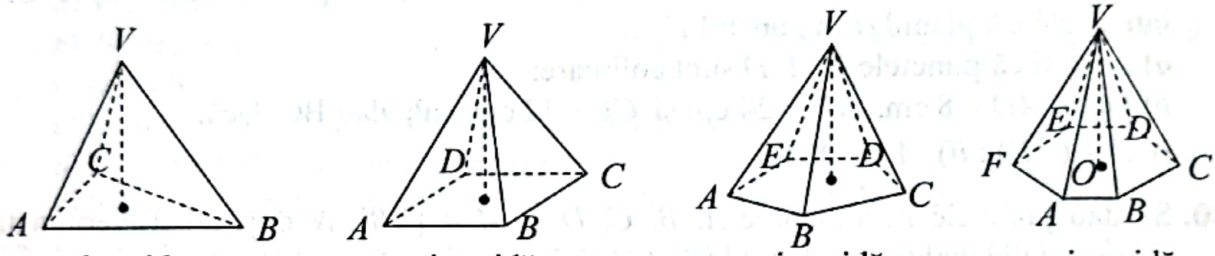
Poliedrele sunt corpuri geometrice mărginite de suprafețe plane.

Piramida. Fie un poligon $A_1A_2A_3...A_n$ situat într-un plan α și un punct V exterior planului α. *Piramida* este corpul mărginit de suprafețele plane $A_1A_2A_3...A_n$ și VA_1A_2, VA_2A_3, ..., VA_nA_1, care se numesc *fețe*.

Punctul V se numește *vârful piramidei*. Poligonul $A_1A_2A_3...A_n$ se numește *baza piramidei*, iar triunghiurile VA_1A_2, VA_2A_3, ..., VA_nA_1 se numesc *fețele laterale*. *Suprafața laterală* a piramidei este reuniunea suprafețelor fețelor laterale.

Muchiile bazei sunt segmentele $[A_1A_2]$, $[A_2A_3]$, ..., $[A_nA_1]$. *Muchiile laterale* sunt segmentele $[VA_1]$, $[VA_2]$, ..., $[VA_n]$.

Observație. Suprafața laterală a unei piramide poate fi desfășurată într-un plan.



piramidă triunghiulară | piramidă patrulateră | piramidă pentagonală | piramidă hexagonală

Denumirea piramidei este dată de numele poligonului de bază.

Tetraedrul (tetra = patru, edru = față) este corpul geometric determinat de patru puncte necoplanare numite vârfuri. În figura 1 este reprezentat tetraedrul $ABCD$.

Muchiile tetraedrului sunt segmentele $[AB]$, $[AC]$, $[AD]$, $[BC]$, $[CD]$, $[DB]$.

Fețele tetraedrului sunt triunghiurile ABC, ACD, ABD, BCD și interioarele lor.

Tetraedrul regulat este tetraedrul care are toate muchiile de lungimi egale, prin urmare toate fețele lui sunt triunghiuri echilaterale.

Observație. Orice față a tetraedrului poate fi considerată bază. O *desfășurare în plan* a suprafeței tetraedrului $ABCD$ este reprezentată în figura 2.

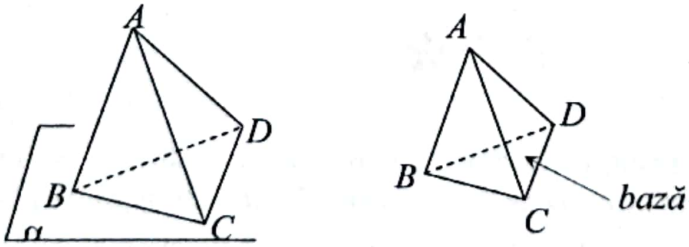


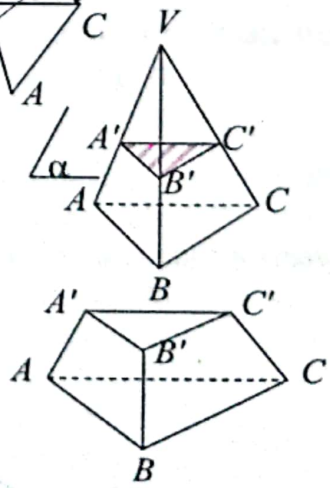
Figura 1

Figura 2.

Trunchiul de piramidă. Corpul obținut prin secționarea unei piramide cu un plan paralel cu planul bazei și îndepărtarea piramidei mici obținute se numește *trunchi de piramidă*.

Denumirea trunchiului de piramidă este dată de natura piramidei din care provine acesta.

În figura alăturată este reprezentat trunchiul de piramidă



$ABCA'B'C'$.

Elementele trunchiului de piramidă:

Vârfurile trunchiului : A, B, C, A', B', C';

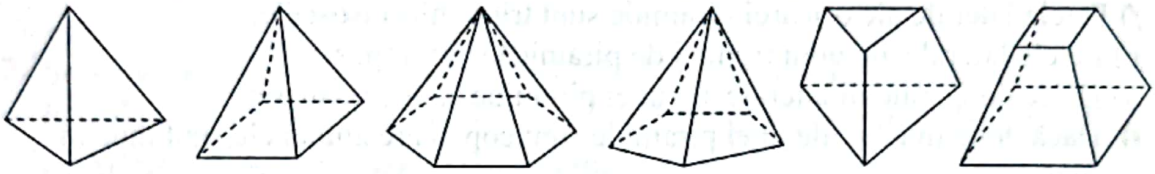
Bazele – care sunt poligoane asemenea: ABC – *baza mare* şi $A'B'C'$ – *baza mică*;

Muchiile bazei mari – $[AB]$, $[AC]$, $[BC]$, *muchiile bazei mici* – $[A'B']$, $[A'C']$, $[B'C']$ şi *muchiile laterale*: $[AA']$, $[BB']$, $[CC']$.

Feţele laterale: trapezele $ABB'A'$, $BCC'B'$, $CAA'C'$.

*

1. Precizaţi, pentru fiecare desen, denumirea corpului reprezentat:



a) *b)* *c)* *d)* *e)* *f)*

2. Desenul alăturat reprezintă o piramidă patrulateră $VABCD$. Numiţi:

a) muchiile laterale; *b)* vârfurile bazei;

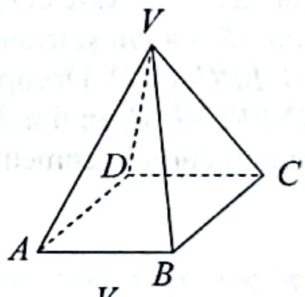
c) laturile bazei; *d)* patru vârfuri necoplanare;

e) toate planele diferite determinate de câte trei din vârfurile sale;

f) o muchie şi un punct exterior ei;

g) trei muchii care au un punct comun;

h) toate perechile de muchii necoplanare.



3. Fie piramida hexagonală $VABCDEF$ din figura alăturată. Daţi exemple de:

a) trei muchii ale bazei;

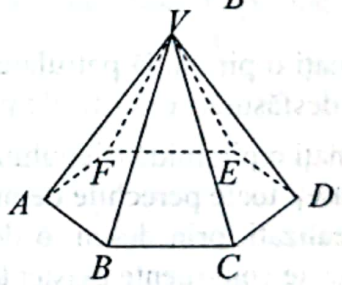
b) trei muchii laterale;

c) două muchii alăturate;

d) două muchii opuse ale bazei;

e) un vârf comun pentru trei muchii;

f) un vârf comun pentru mai mult de 4 muchii.



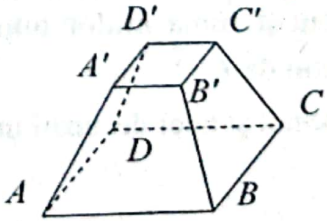
4. Completaţi enunţul următor cu informaţia corectă şi realizaţi câte un desen corespunzător:

a) Un poligon cu 5 laturi se numeşte *pentagon*. O piramidă cu baza pentagon se numeşte ..... .

b) Un poligon cu 7 laturi se numeşte *heptagon*. O piramidă cu baza heptagon se numeşte ..... .

c) Un poligon cu 8 laturi se numeşte *octogon*. O piramidă cu baza octogon se numeşte .....

5. În figura alăturată este reprezentat un trunchi de piramidă patrulateră. Numiţi:

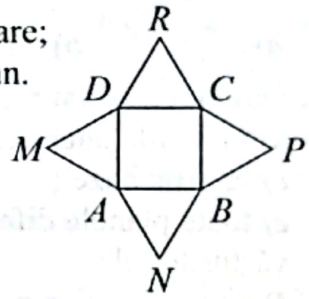


Scanned with OKEN Scanner

a) muchiile laterale;
b) muchiile bazei mici;
c) muchiile bazei mari;
d) perechile de muchii laterale opuse;
e) două muchii neparalele coplanare;
f) trei muchii paralele;
g) două fețe laterale opuse;
h) patru vârfuri necoplanare;
i) trei puncte coplanare cu punctul A;
j) patru perechi de muchii necoplanare.

6. Stabiliți valoarea de adevăr a propozițiilor:
a) O piramidă triunghiulară are 4 muchii;
b) O piramidă patrulateră are 4 fețe;
c) Există un trunchi de piramidă care are un număr impar de vârfuri;
d) O piramidă triunghiulară are 3 fețe laterale;
e) Orice tetraedru are numărul de vârfuri egal cu numărul de fețe.
f) Fețele laterale ale oricărei piramide sunt triunghiuri isoscele;
g) Fețele laterale ale unui trunchi de piramidă sunt trapeze;
h) Orice două muchii laterale ale unei piramide sunt coplanare;
i) Dacă două muchii ale unei piramide sunt coplanare atunci ele sunt muchii laterale;
j) În orice piramidă există două muchii care sunt necoplanare;
k) În orice piramidă există trei muchii situate în același plan.

7. Figura alăturată este compusă din pătratul $ABCD$ cu latura $AB = 4$ cm și triunghiurile echilaterale MAD, ANB, BPC, CRD. Decupați figura după conturul $MANBPCRDM$, apoi îndoiți după AB, BC, CD și DA și numiți corpul geometric obținut.



**

8. Desenați o piramidă patrulateră $SABCD$ cu baza $ABCD$. Reprezentați, prin desen, două desfășurări diferite ale piramidei $SABCD$.

9. Desenați o piramidă triunghiulară $VABC$.
a) Scrieți toate perechile de muchii necoplanare ale piramidei;
b) Realizați, prin desen, o desfășurare a piramidei $VABC$ și scrieți perechile de segmente congruente existente în figură.

10. Determinați:
a) numărul de muchii laterale ale unei piramide hexagonale;
b) numărul total de muchii ale unei piramide octogonale;
c) numărul de muchii ale bazei unei piramidei care are 11 vârfuri.

11. Aflați suma lungimilor muchiilor unui tetraedru regulat, cu o muchie de 10 cm.

12. O piramidă patrulateră are toate muchiile egale. Știind că suma lungimilor tuturor muchiilor este egală cu 120 cm, să se calculeze aria bazei.

13. Calculați suma ariilor tuturor fețelor unui tetraedru regulat, cu lungimea unei muchii de $6\sqrt{3}$ cm.

14. Desenați și apoi decupați un triunghi echilateral ABC cu lungimea laturii de 8 cm.

Scanned with OKEN Scanner

Trasați liniile mijlocii în triunghi și îndoiți după acestea până când obțineți o piramidă. Ce fel de piramidă ați obținut? Cât este suma lungimilor tuturor muchiilor acestei piramide?

15. Arătați că oricare două muchii laterale ale unui trunchi de piramidă sunt coplanare.

16. Se consideră tetraedrul regulat $ABCD$ având ca bază triunghiul BCD și lungimea unei muchii egală cu 6cm.

a) Realizați o desfășurare în plan a suprafeței laterale a tetraedrului;

b) Calculați lungimea celui mai scurt drum de la punctul B la punctul D care intersectează muchia $[AC]$.

***

17. Se consideră piramida patrulateră $VABCD$ cu vârful V, care are toate muchiile laterale de 4 cm, iar $m(\sphericalangle AVB) = m(\sphericalangle BVC) = m(\sphericalangle CVD) = m(\sphericalangle DVA) = 30°$.

a) Arătați că muchiile bazei sunt congruente;

b) Realizați o desfășurare în plan a suprafeței laterale a piramidei;

c) Calculați lungimea celui mai scurt drum de la punctul B la punctul D care intersectează muchia $[VC]$;

d) Calculați lungimea celui mai scurt drum de la punctul A la punctul D care intersectează muchiile $[VB]$ și $[VC]$.

18. Fie n numărul de vârfuri ale bazei unei piramide. Exprimați în funcție de n:

a) Numărul de muchii laterale ale piramidei;

b) Numărul total de vârfuri ale piramidei;

c) Numărul total de muchii ale piramidei.

19. Fie n numărul de vârfuri ale bazei unui trunchi de piramidă. Exprimați în funcție de n:

a) Numărul de muchii laterale ale trunchiului de piramidă;

b) Numărul total de vârfuri ale trunchiului de piramidă;

c) Numărul total de muchii ale trunchiului de piramidă.

Probleme de șapte stele

20. Notăm cu v numărul total de vârfuri ale unei piramide, cu m numărul total de muchii ale piramidei și cu f numărul total de fețe ale piramidei.

a) Exprimați numerele m și f în funcție de v;

b) Verificați dacă $v + f = m + 2$.

21. Un triunghi ascuțitunghic se îndoaie după liniile sale mijlocii. Se obține o piramidă? Dar dacă triunghiul este obtuzunghic? Dar dacă triunghiul este dreptunghic?

22. Trunchiul de piramidă triunghiulară $ABCA'B'C'$ a fost obținut prin secționarea unui tetraedru regulat cu muchia $AB = 10$ cm. Dacă $A'B' = 6$ cm, calculați:

a) suma tuturor lungimilor muchiilor trunchiului; *b)* aria unei fețe laterale.

Scanned with OKEN Scanner

2.3. Prisma

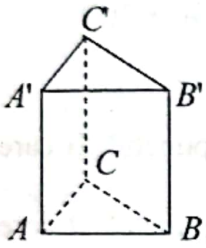
Elementele prismei

Două baze care sunt poligoane congruente; laturile celor două poligoane se numesc *muchiile bazelor*;
Muchiile laterale care sunt segmente paralele şi congruente între ele;
Feţele laterale ale unei prisme sunt paralelograme;
Suprafaţa laterală a unei prisme este reuniunea suprafeţelor feţelor laterale.

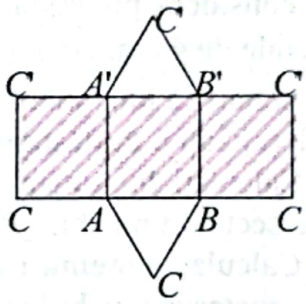
Numele unei prisme este dat de numele poligonului de bază. Dacă feţele laterale ale unei prisme sunt *dreptunghiuri*, prisma se numeşte *dreaptă*.

Observaţie: Suprafaţa laterală a unei piramide poate fi desfăşurată într-un plan.

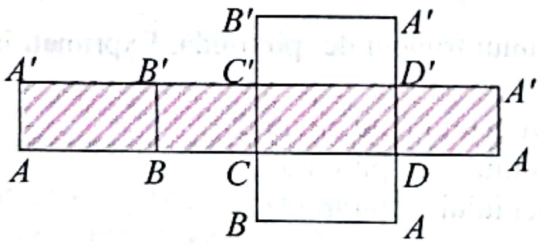
Prisma triunghiulară. Desenul de mai jos (stânga) reprezintă o *prismă triunghiulară dreaptă* $ABCA'B'C'$. O *desfăşurare* a prismei triunghiulare drepte este reprezentată în desenul din dreapta.

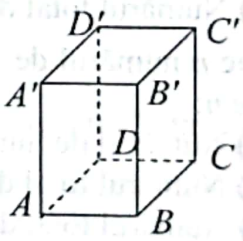


Bazele sunt triunghiurile congruente ABC şi $A'B'C'$.
Muchiile laterale sunt AA', BB', CC'.
Feţele laterale sunt dreptunghiurile $ABB'A'$, $BCC'B'$ şi $CAA'C'$.



Paralelipipedul dreptunghic (*cuboidul*) este o prismă patrulateră dreaptă particulară în care toate feţele sunt dreptunghiuri. În figura din dreapta este reprezentat un paralelipiped dreptunghic $ABCDA'B'C'D'$, iar o *desfăşurare* a paralelipipedului dreptunghic este reprezentaă în figura din stânga.

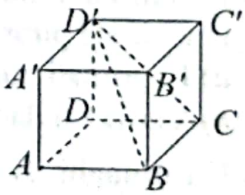




Dreptunghiurile $ABCD$ şi $A'B'C'D'$ sunt *bazele paralelipipedului*, iar *feţele laterale* sunt dreptunghiurile $ABB'A'$, $BCC'B'$, $CDC'D'$, $DAA'D'$.

Muchiile laterale sunt AA', BB', CC', DD'.

Dimensiunile paralelipipedului sunt lungimile a trei muchii care au o extremitate comună. De exemplu: $AB = L$ este *lungimea*, $BC = l$ este *lăţimea* şi $BB' = h$ este *înălţimea*. *O diagonală* a paralelipipedului (cuboidului) este segmentul determinat de două vârfuri ale paralelipipedului nesituate pe aceeaşi faţă: de exemplu $[BD']$.



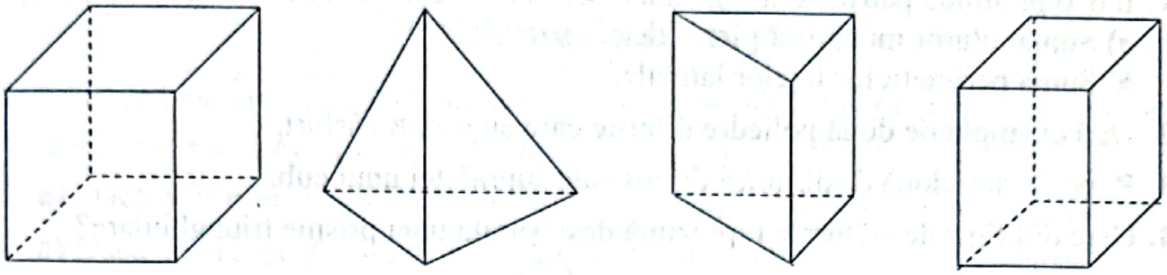
Prisma patrulateră regulată este un paralelipiped dreptunghic particular $ABCDA'B'C'D'$ în care baza $ABCD$ este pătrat.

Cubul este o prismă patrulateră particulară în care toate feţele sunt pătrate.

Scanned with OKEN Scanner

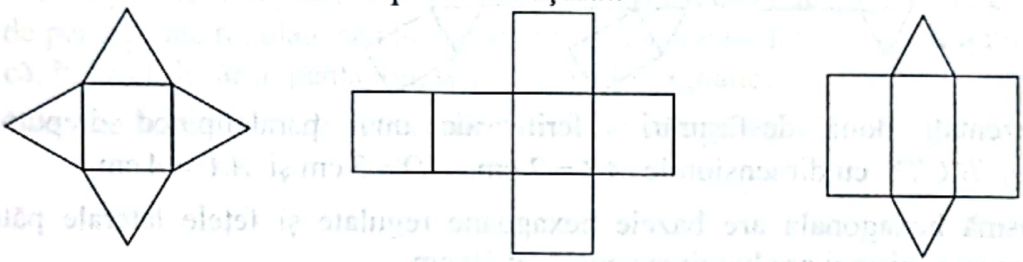
*

1. Scrieți sub fiecare desen denumirea corpului:



a) *b)* *c)* *d)*

2. Desenele de mai jos reprezintă desfășurările unor corpuri geometrice. Scrieți sub fiecare desen denumirea corpului desfășurat.



a) *b)* *c)*

3. Dați exemple de obiecte cunoscute care au formă de:
a) paralelipiped dreptunghic; *b)* prismă hexagonală;
c) piramidă; *d)* cub.

4. Numiți prisma care are numărul minim de fețe.

5. Completați enunțul următor cu informația corespunzătoare și realizați un desen:
a) O prismă cu baza pentagon se numește .....
b) O prismă cu baza heptagon se numește .....
c) O prismă cu baza octogon se numește .....

6. Indicați numărul minim de muchii pe care îl poate avea:
a) o piramidă; *b)* o prismă.

**

7. Desenați o prismă patrulateră regulată $ABCDEFGH$. Indicați:
a) bazele prismei; *b)* o față laterală;
c) două fețe laterale opuse; *d)* două fețe laterale alăturate;
e) două muchii opuse; *f)* trei muchii concurente într-un punct.

8. Desenați un paralelipiped dreptunghic $ABCDA'B'C'D'$. Oricare două vârfuri ale paralelipipedului determină câte o dreaptă. Descoperiți în mulțimea tuturor dreptelor astfel obținute:
a) 6 perechi de drepte paralele;
b) 6 perechi de drepte concurente;
c) 6 perechi de drepte necoplanare.

Scanned with OKEN Scanner

9. Suma lungimilor tuturor muchiilor unui cub este 96 cm. Cât este lungimea unei muchii a cubului?

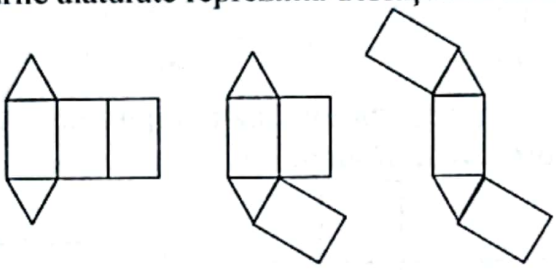
10. Un cub are aria unei fețe de 16 cm^2. Calculați suma tuturor muchiilor cubului.

11. Într-o piramidă patrulateră regulată toate muchiile au lungimea de 10 cm. Aflați:
a) Suma tuturor muchiilor piramidei;
b) Suma perimetrelor fețelor laterale.

12. Dați exemplu de două poliedre diferite care au câte 8 vârfuri.

13. Reprezentați două desfășurări diferite ale suprafeței unui cub.

14. Care din figurile alăturate reprezintă desfășurata unei prisme triunghiulare?



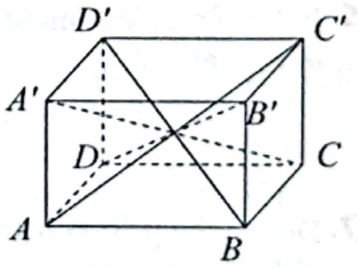
15. Reprezentați două desfășurări diferite ale unui paralelipiped dreptunghic $ABCDA'B'C'D'$ cu dimensiunile $AB = 2$ cm, $AD = 3$ cm și $AA' = 4$ cm.

16. O prismă hexagonală are bazele hexagoane regulate și fețele laterale pătrate. O muchie a prismei are lungimea egală cu 10 cm.
a) Reprezentați prin desen prisma dată;
b) Calculați suma lungimilor tuturor muchiilor prismei.
c) Calculați suma tuturor ariilor fețelor laterale.
d) Calculați aria bazei prismei.

***

17. Două piramide patrulatere au bază comună, iar vârfurile situate de o parte și de alta a planului bazei. Indicați:
a) Numărul de muchii ale poliedrului obținut;
b) Numărul de fețe ale poliedrului obținut.

18. În cubul $ABCDA'B'C'D'$ (vezi figura alăturată) notăm cu O intersecția diagonalelor AC' și BD'.
a) Arătați că prin O trec și diagonalele CA' și DB'.
b) Dacă $AB = 12$ cm calculați volumul piramidei $OABCD$ (observând din câte astfel de piramide se compune cubul).



19. O bază a unei prisme are n muchii. Exprimați în funcție de n:
a) Numărul de vârfuri ale prismei;
b) Numărul total de fețe ale prismei;
c) Numărul total de muchii ale primei;
d) Notăm cu v numărul de vârfuri ale prismei, cu m numărul total de muchii și cu f numărul total de fețe. Verificați dacă are loc egalitatea $f + v = m + 2$.

20. Stabiliți valoarea de adevăr a propozițiilor:

Scanned with OKEN Scanner

a) Numărul total de muchii ale unei prisme se divide cu 3.
b) Două prisme cu acelaşi număr de vârfuri au acelaşi număr de feţe.
c) Două piramide cu acelaşi număr de feţe au acelaşi număr de muchii.
d) Două poliedre cu acelaşi număr de feţe au acelaşi număr de muchii.

Probleme de şapte stele

21. Se ştie că, pentru orice poliedru care v vârfuri, m muchii şi f feţe, are loc egalitatea $f+v=m+2$. (*Relaţia lui Euler*)

a) Dacă $m=6$ şi $f=4$, determinaţi v, recunoaşteţi şi desenaţi poliedrul;

b) Dacă $v=12$ şi $f=8$, determinaţi m, recunoaşteţi şi desenaţi poliedrul.

22. Reprezentaţi în desen două poliedre, primul având 6 vârfuri şi 8 feţe, iar al doilea având 8 vârfuri şi 6 feţe.

23. Anvelopa unei mingi de fotbal este confecţionată din bucăţi de piele având forma de pentagoane regulate sau hexagoane regulate având laturile de lungime l. Se ştie că, în jurul fiecărui pentagon, se află cinci hexagoane.

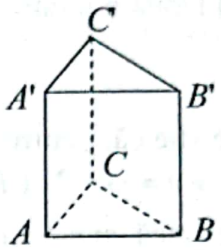
Din câte bucăţi de piele este confecţionată anvelopa mingii ?

Scanned with OKEN Scanner

E TESTE DE EVALUARE

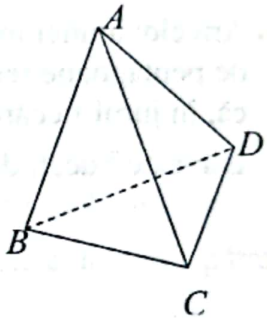
Testul 1

Subiectul I



(1p) *a*) Desenați și denumiți corpul din figura alăturată;
(1p) *b*) Numiți muchiile laterale ale corpului;
(1p) *c*) Numiți vârfurile care nu sunt situate în planul (ABB');
(1p) *d*) Precizați numărul total de fețe ale corpului;
(1p) *e*) Determinați dreapta de intersecție a planelor (ABB') și $(A'BC')$.

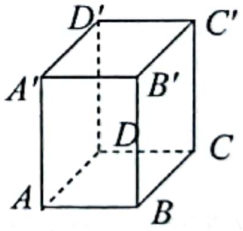
Subiectul II



(1p) *a*) Desenați și denumiți corpul din figura alăturată;
(1p) *b*) Numiți toate planele care mărginesc corpul;
(1p) *c*) Numiți toate perechile de muchii necoplanare ale corpului;
(1p) *d*) Precizați și justificați valoarea de adevăr a propoziției: Dacă $M \in BC$ și $N \in AD$, atunci punctele A, D, M și N sunt coplanare.

Testul 2

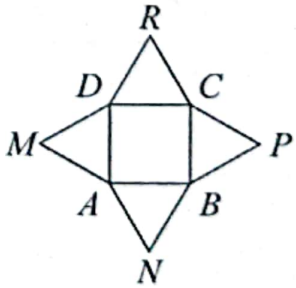
Subiectul I



(1p) *a*) Desenați și denumiți corpul din figura alăturată;
(1p) *b*) Dați exemplu de o pereche de muchii coplanare;
(1p) *c*) Dați exemplu de trei vârfuri care sunt situate pe aceeași față a corpului;
(1p) *d*) Numiți un plan determinat de trei dintre vârfurile corpului nesituate pe aceeași față;
(1p) *e*) Considerăm un plan oarecare α determinat de trei dintre vărfurile corpului. Precizați care este numărul minim de vărfuri ale corpului nesituate în planul α.

Subiectul II

În figura alăturată $ABCD$ este pătrat, iar triunghiurile ADM, DCR, CBP și BAN sunt echilaterale conținute în același plan.



(1p) *a*) Denumiți corpul care se obține pliind triunghiurile echilaterale după dreptele AD, DC, CB respectiv AB;
(1p) *b*) Numiți punctele din figură care vor coincide după pliere;
(1p) *c*) Dacă $AB = 5$ cm, calculați suma tuturor muchiilor corpului obținut.
(1p) *d*) Precizați distanța dintre punctele M și B, după pliere.

Notă: Timp de lucru 45 minute. Se acordă 1 punct din oficiu.

Scanned with OKEN Scanner

Fişă pentru portofoliul individual

Numele şi prenumele: _____

Clasa a VIII-a ____ **G1**

Tema nr. II.1: Puncte, drepte, plane. Piramida. Prisma

(2p) 1. Completaţi spaţiile punctate astfel încât să obţineţi afirmaţii adevărate:

a) Trei puncte situate pe aceeaşi dreaptă se numesc puncte.....

b) Patru puncte nesituate în acelaşi plan se numesc puncte.....

c) Piramida triunghiulară are..... feţe.

d) O prismă cu baza hexagon se numeşte prismă.....

(2p) 2. Pentru fiecare dintre enunţurile următoare, dacă enunţul este adevărat, încercuiţi litera „A", în caz contrar încercuiţi litera „F":

a)	Trei puncte necoliniare determină un plan.	A	F
b)	Oricare două puncte care sunt coliniare.	A	F
c)	O piramidă patrulateră are 6 muchii.	A	F
d)	Toate feţele unui paralelipipedul dreptunghic sunt dreptunghiuri.	A	F

(2p) 3. Încercuiţi răspunsul corect la fiecare dintre următoarele exerciţii. Dintre cele patru variante de răspuns, scrise la fiecare cerinţă, doar una este corectă.

a) Numărul dreptelor care trec prin trei puncte necoliniare este:
A. 2 **B.** 3 **C.** 1 **D.** 4

b) Numărul feţelor unui tetraedru este:
A. 1 **B.** 2 **C.** 3 **D.** 4

c) Un plan este unic determinat de:
A. 1 dreaptă **B.** 2 drepte paralele **C.** 2 puncte **D.** 4 puncte coliniare

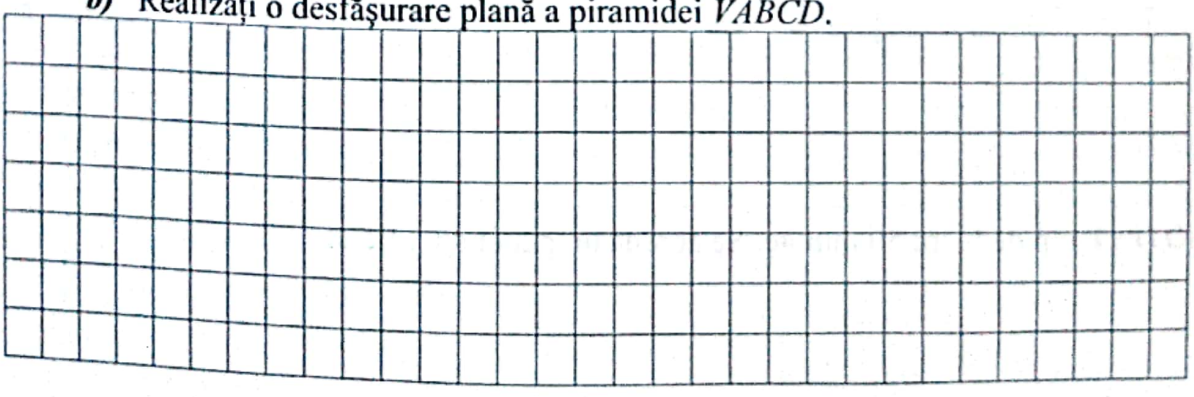
d) Prisma patrulateră are:
A. 8 vârfuri **B.** 6 vârfuri **C.** 4 vârfuri **D.** 1 vârf

La următoarele subiecte scrieţi pe fişa de evaluare rezolvările complete.

(1,5p) 4. Desenaţi o piramidă patrulateră $VABCD$ cu baza $ABCD$.

a) Numiţi muchiile laterale ale piramidei;

b) Realizaţi o desfăşurare plană a piramidei $VABCD$.



Scanned with OKEN Scanner

(1,5p) 5. Desenați o prismă triunghiulară $ABCA'B'C'$ cu baza ABC triunghi echilateral. Fețele laterale ale prismei sunt dreptunghiuri. Se știe că $AB = 6$ cm și $AA' = \frac{2}{3} AB$.

a) Calculați aria bazei ABC; ***b)*** Calculați suma utturor muchiilor prismei;

c) Dați 2 exemple de drepte necoplanare.

NOTĂ: Timp de lucru 50 minute. Se acordă un punct din oficiu.

Scanned with OKEN Scanner

2.4. Poziţiile relative a două drepte în spaţiu

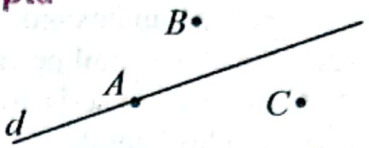
Poziţiile relative ale unui punct faţă de o dreaptă

Punctul *aparţine* dreptei.

Exemplu. $A \in d$.

Punctul *nu aparţine* dreptei (este *exterior* dreptei).

Exemple. $B \notin d$, $C \notin d$.



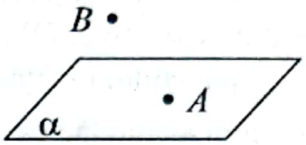
Poziţiile relative ale unui punct faţă de un plan

Punctul *aparţine* planului (este *situat* în plan).

Exemplu. $A \in \alpha$.

Punctul *nu aparţine* planului (este *exterior* planului).

Exemplu. $B \notin \alpha$.



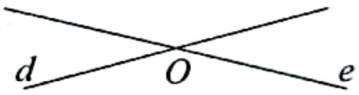
Poziţiile relative a două drepte în spaţiu

Două drepte sunt *identice* (*confundate* sau *coincid*) dacă au două puncte comune.

Exemplu: Dacă $d \subset e$ şi $e \subset d$, atunci $d = e$.

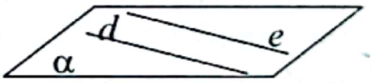
Două drepte sunt *concurente* dacă au un punct comun.

Exemplu: $d \cap e = \{O\}$.



Două drepte sunt *paralele* dacă sunt coplanare şi nu au puncte comune.

Exemplu: $d \subset \alpha$, $e \subset \alpha$ şi $d \cap e = \varnothing$, atunci $d \parallel e$.



Două drepte sunt *necoplanare* dacă nu sunt concurente şi nu sunt paralele.

Exemplu: $d \cap e = \varnothing$ şi d, e.

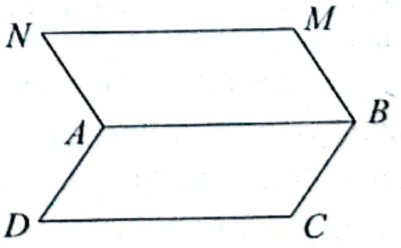
Observaţii.

1. Se consideră dreptele a, b şi c. Dacă $a \parallel b$ şi $b \parallel c$, atunci $a = c$ sau $a \parallel c$ (*proprietatea de tranzitivitate* a relaţiei de paralelism).
2. Două drepte sunt *coplanare* dacă şi numai dacă sunt paralele sau concurente.

---

*

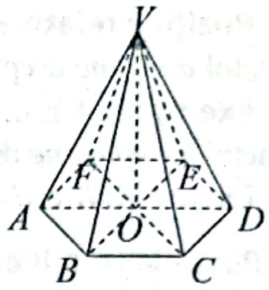
1. Paralelogramele $ABCD$ şi $ABMN$ sunt în plane diferite. Precizaţi poziţia:
   a) punctului C faţă de dreapta AC;
   b) punctului D faţă de dreapta AB;
   c) punctului B faţă de planul (ADC);
   d) punctului D faţă de planul (AMN);
   e) punctului A faţă de planul (MNC);
   f) dreptei NM şi dreapta AB;
   g) dreptei AM şi dreapta NB;
   h) dreptei MN faţă de dreapta DB;



Scanned with OKEN Scanner

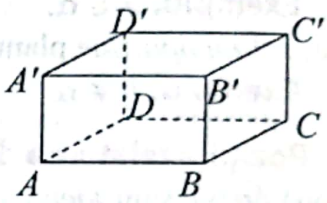
i) dreptei DB față de dreapta AM; *j*) dreptei AB față de dreapta MC;
k) dreptei NM față de dreapta CD; *l*) dreptei NC față de dreapta MD.

2. În figura alăturată este reprezentată o piramidă $VABCDEF$ care are ca bază un hexagon regulat cu centrul O.



a) Reproduceți desenul pe caiet;
b) Menționați în scris poziția relativă a:
– două muchii laterale;
– două muchii oarecare ale bazei;
– dreptelor AB și DE;
– punctului O față de dreapta AD.

3. În figura alăturată este reprezentat paralelipipedul dreptunghic $ABCDA'B'C'D'$.

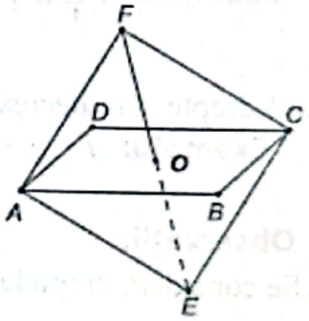


Precizați poziția relativă a următoarelor drepte:
a) AB și $A'B'$; *b*) BC și DC; *c*) AB și CC';
d) BD și CC'; *e*) DB și AC; *f*) AC și $A'C'$;
g) AC' și $A'C$; *h*) AB și $D'C'$; *i*) BC și $A'C'$;

**

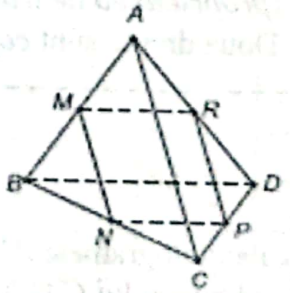
4. Se consideră punctele diferite A, B, C și D. Stabiliți valoarea de adevăr a propoziției: "Dacă dreptele AB și CD sunt coplanare, atunci și dreptele AC și BD sunt coplanare".

5. În figura alăturată, $ABCD$ este pătrat cu centrul O, iar punctele E și F sunt situate de o parte și de alta a planului (ABC) astfel încât punctul O este mijlocul segmentului $[EF]$. Arătați că:



a) Punctele A, O și C sunt coliniare;
b) Punctele A, E, C și F sunt coplanare;
c) Punctele B, D, E, F sunt coplanare;
d) $[DF] \equiv [BE]$.

6. În tetraedrul $ABCD$ se notează cu M, N, P și respectiv R mijloacele muchiilor AB, BC, CD, DA (vezi figura). Demonstrați că $MNPR$ este paralelogram.



7. Fie tetraedrul $ABCD$ și M, N, P, Q mijloacele muchiilor AC, AD, BC respectiv BD. Stabiliți dacă:
a) dreptele NP și MQ sunt coplanare;
b) dreptele MP și NQ sunt coplanare;
c) patrulaterul $MNPQ$ este paralelogram.

8. Prin vârfurile paralelogramului $ABCD$ trec dreptele a, b, c și respectiv d paralele între ele și nesituate în planul (ADC). Punctele M, N, P și Q sunt situate pe dreptele a, b, c și respectiv d, de aceeași parte a planului (ADC). Fie O centrul

Scanned with OKEN Scanner

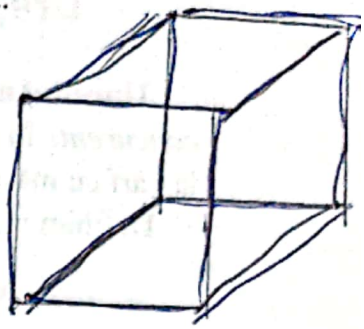
paralelogramului $ABCD$, iar O' şi O'' mijloacele segmentelor $[MP]$ şi $[NQ]$. Dacă $AM = 2$ cm, $BN = 6$ cm, $CP = 12$ cm şi $DQ = 8$ cm, arătaţi că:

a) $OO' \parallel AM$; *b*) $OO'' \parallel BN$; *c*) $[OO'] \equiv [OO'']$;

d) Dreptele OO' şi OO'' coincid; *e*) $O' = O''$;

f) Punctele M, N, P şi Q sunt coplanare;

g) Patrulaterul $MNPQ$ este paralelogram.



***

9. Se consideră punctele diferite A, B, C şi D. Arătaţi că, dacă $AB \parallel CD$, atunci $AC \parallel BD$ sau $AC \cap BD \neq \varnothing$.

10. Demonstraţi că, dacă trei drepte necoplanare sunt concurente două câte două, atunci cele trei drepte au un punct comun.

11. Demonstraţi că, în orice tetraedru, cele patru drepte determinate de fiecare vârf cu centrul de greutate al feţei opuse sunt concurente.

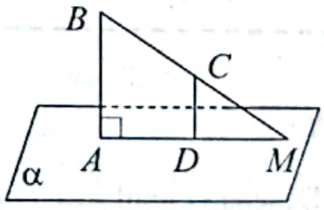
12. Demonstraţi că, în orice tetraedru, cele trei drepte determinate de mijloacele muchiilor opuse sunt concurente.

13. Desenaţi paralelipipedul dreptunghic $ABCDA'B'C'D'$ şi notaţi cu M, N, P şi Q respectiv mijloacele segmentelor $A'B$, $A'D$, CB' şi CD'. Demonstraţi că $MN \parallel PQ$.

14. Se consideră hexagonul regulat $ABCDEF$ şi pătratul $ABMN$ situate în plane diferite. Arătaţi că: *a*) $MN \parallel FC$; *b*) dreptele ME şi ND sunt concurente.

Probleme de şapte stele

15. Trapezul $ABCD$ cu $AB \parallel CD$ are latura AD inclusă în planul α iar vârfurile B şi C în afara planului α. Notăm cu M punctul de intersecţie al dreptei BC cu planul α. Dacă $AD = 5$ cm, $AB = 12$ cm şi $CD = 8$ cm, calculaţi AM.



16. Se consideră piramida patrulateră regulată $VABCD$ cu baza $ABCD$ pătrat de centru O. Fie punctele $M \in [AB]$, $N \in [CD]$ astfel încât $[AM] = [CN]$.

a) Arătaţi că punctele M, N, O, sunt coliniare;

b) Arătaţi că punctele M, N, O, V sunt coplanare.

c) Fie punctul R astfel încât O să fie mijlocul segmentului $[VR]$. Arătaţi că:

i) $VA \parallel RC$; *ii*) $VB = RD$; *iii*) $VM \parallel RN$.

17. Se consideră punctele necoplanare A, B, C, D. Bisectoarea unghiului BAC intersectează segmentul $[BC]$ în punctul M, iar bisectoarea unghiului BAD intersectează segmentul $[BD]$ în punctul N. Demonstraţi că $MN \parallel CD$ dacă şi numai dacă $AC = AD$.

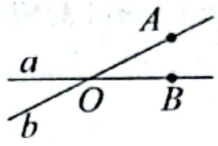
Scanned with OKEN Scanner

2.5. Unghiul a două drepte în spațiu. Drepte perpendiculare

Unghiul a două drepte situate în același plan. Se consideră două drepte a și b *concurente* în punctul O. Cele două drepte determină două perechi de unghiuri opuse la vârf cu măsurile egale cu $v°$, respectiv $180° - v°$.

Definim *măsura unghiului dreptelor* a și b ca fiind:

$$m(\widehat{a;b}) \overset{def}{=} \min\left(v°; 180° - v°\right).$$

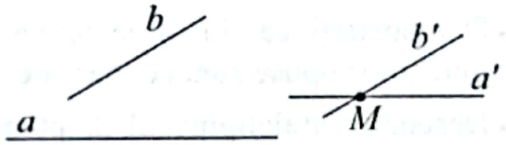


Observații.

1. Dacă $a = b$ sau $a \parallel b$, atunci $m(\widehat{a;b}) = 0°$;

2. Dacă a, b, c și d sunt drepte astfel încât $a \cap b \neq \varnothing$, $c \cap d \neq \varnothing$, $a \parallel c$ și $b \parallel d$, atunci $m(\widehat{a;b}) = m(\widehat{c;d})$ (consecință a *teoremei unghiurilor cu laturile respectiv paralele*).

Unghiul a două drepte necoplanare. Considerăm două *drepte necoplanare* a și d și punctul M în spațiu. Dreptele a' și b' sunt astfel încât $a \parallel a'$, $b \parallel b'$ și $a' \cap b' = \{M\}$.



Definim *măsura unghiului dreptelor* a și b ca fiind:

$$m(\widehat{a;b}) \overset{def}{=} m(\widehat{a';b'})$$

Observație: Se poate alege $M \in a$ sau $M \in b$.

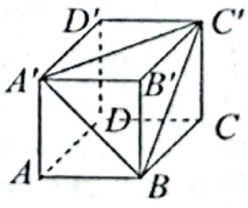
Definiție. Dacă a și b sunt două drepte astfel încât $m(\widehat{a;b}) = 90°$, atunci dreptele se numesc *perpendiculare*. Notăm $a \perp b$.

---

*

1. Desenați cubul $ABCDA'B'C'D'$.
Determinați măsurile unghiului dintre dreptele:

a) DC și CD; *b)* AA' și BB'; *c)* AA' și CC';
d) AB și BC; *e)* AB și $A'D'$; *f)* $A'B$ și AB;
g) DC și $A'B$; *h)* BC' și $B'C$; *i)* BC' și $A'D$.



2. Se consideră cubul $ABCDA'B'C'D'$ de latură ℓ.
a) Calculați, în funcție de ℓ, perimetrul triunghiului $A'C'B$;
b) Determinați măsura unghiului dintre dreptele $A'B$ și BC';
c) Determinați măsura unghiului dintre dreptele $A'B$ și AD'.

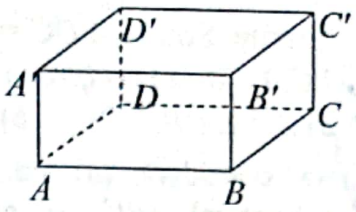
3. Desenați cubul $ABCDA'B'C'D'$. Determinați:

a) $m(\widehat{A'C', BC})$; *b)* $m(\widehat{BC', AC})$;

c) $m(\widehat{D'C, BO})$ unde O este mijlocul segmentului $[A'C']$.

Scanned with OKEN Scanner

4. În figura alăturată este desenat un paralelipiped dreptunghic Precizați măsura unghiului format de perechile de drepte:



a) AB și $B'C'$; *b*) AB și CC'; *c*) $D'C'$ și AD;
d) AB și CD; *e*) DD' și BC; *f*) $A'C'$ și AC.

5. Pătratul $ABCD$ și rombul $ABMN$ sunt situate în plane diferite. Știind că $m(\sphericalangle CBM) = 110°$ și $m(\sphericalangle ANM) = 100°$, calculați măsurile unghiurilor formate de dreptele:
a) AC și BD; *b*) AD și BM; *c*) DC și MN;
d) AC și MN; *e*) CM și DN; *f*) DC și NA.

**

6. Paralelogramul $ABCD$, cu $m(\sphericalangle DAB) = 60°$ și trapezul $DCEF$ în care $DC \parallel EF$ și $m(\sphericalangle DCE) = 110°$ sunt situate în plane diferite. Calculați măsura unghiului format de dreptele:
a) AB și EF; *b*) AB și CE; *c*) AD și EF.

7. Se consideră pătratul $ABCD$ și trapezul isoscel $ABEF$ cu $E \notin (ABC)$ și $m(\sphericalangle ABE) = 60°$. Știind că $AF = EB = EC$, determinați măsurile unghiurilor dreptelor:
a) EF și DC; *b*) AC și EF; *c*) EB și DC; *d*) AD și EF.

8. Dreptunghiul $ABCD$ și trapezul dreptunghic $CDEF$, în care $CD \parallel EF$ și $m(\sphericalangle CDE) = 90°$, sunt situate în plane diferite. Se mai știe că $m(\sphericalangle ADE) = 90°$ și $m(\sphericalangle FCD) = 55°$. Determinați măsurile unghiurilor formate de perechile de drepte:
a) ED și BC; *b*) AB și EF; *c*) FC și AB; *d*) BC și EF.

9. Se consideră dreptunghiul $ABCD$ și triunghiul dreptunghic isoscel DCE cu $m(\sphericalangle E) = 90°$ și $E \notin (ABC)$. Se știe și că $DC = 6\sqrt{2}$ cm și $BC = BE = 6$ cm.
Precizați măsura unghiului format de dreptele:
a) EC și AB; *b*) EB și BC; *c*) EC și AD;
d) AD și EM unde M este mijlocul segmentului $[BC]$; *e*) ED și EB.

10. În paralelipipedul dreptunghic $ABCDA'B'C'D'$ în care O și O' sunt centrele fețelor $ABCD$ și $A'B'C'D'$. Se știe că $AB = 6$ cm, $BC = 8$ cm și $CC' = 24$ cm.
a) Demonstrați că $OO' \parallel AA'$.
b) Arătați că $OO' \perp AC$.
c) Determinați $m(\widehat{AA'; AC})$.
d) Aflați cosinusul unghiului format de dreptele CC' și AC'.
e) Determinați sinusul unghiului format de dreptele BC și $A'C'$.

11. Triunghiul echilateral ABC cu $AB = 12$ cm și triunghiul isoscel DBC sunt în plane

Scanned with OKEN Scanner

diferite. Știind că $DC = DB = 6\sqrt{3}$ cm și $DA = 6$ cm, notăm cu E mijlocul laturii BC. Folosind *reciproca teoremei lui Pitagora*, demonstrați că:

a) $AD \perp DB$; *b*) $AD \perp DE$.

12. Se consideră prisma triunghiulară dreaptă $ABCA'B'C'$ cu baza triunghiul echilateral ABC. Se notează cu M mijlocul muchiei $[AC]$. Precizați măsura unghiului format de dreptele:

a) AC și $A'C'$; *b*) AA' și AC; *c*) BM și AC;
d) BM și $A'C'$; *e*) BC și AC; *f*) BM și $B'C'$.

***

13. Se consideră punctul V exterior planului pătratului $ABCD$ astfel încât $VA = VB = VC = VD = AB = 4$ cm.

a) Arătați că $VA \perp CV$.

b) Calculați măsurile unghiurilor dreptelor:

i) VB și AD; *ii*) VA și AC.

14. Notăm cu M mijlocul muchiei AB a tetraedrului regulat $ABCD$ cu $AB = 10$ cm. Să se calculeze:

a) $\cos \widehat{MCD}$; *b*) aria triunghiului MDC; *c*) $\sin \widehat{DMC}$.

15. În tetraedrul $ABCD$ notăm cu M, N, P, Q mijloacele muchiilor AD, AB, BC respectiv CD. Se știe că $m\left(\widehat{AC; BD}\right) = 90°$.

a) Arătați că $m(\sphericalangle MNP) = 90°$.

b) Arătați că, dacă $AC = BD$, atunci $MNPQ$ este pătrat.

Probleme de șapte stele

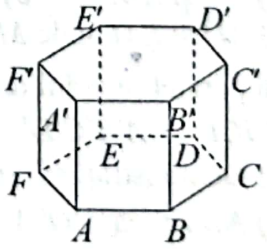
16. În piramida patrulateră $VABCD$ cu baza pătratul $ABCD$ se notează cu M și N mijloacele muchiilor AB, respectiv CD. Dându-se $VA = VB = VC = VD = 5\sqrt{6}$ și $AB = 10\sqrt{2}$.

a) Calculați VM; *b*) Determinați $m\left(\widehat{VM; VN}\right)$.

17. Fie prisma hexagonală dreaptă $ABCDEFA'B'C'D'E'F'$ cu baza hexagonul regulat $ABCDEF$ în care $AD = 2$cm și $AA' = 2\sqrt{3}$ cm (vezi figura).

Determinați măsurile unghiurilor formate de dreptele:

a) AD și $A'B'$; *b*) ED și BB';
c) AC și $C'D'$; *d*) EB și $A'D'$.

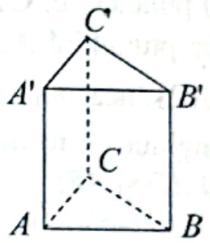


Scanned with OKEN Scanner

E TESTE DE EVALUARE

Testul 1

1. În figura alăturată este reprezentată o prismă dreaptă în care baza ABC este triunghi echilateral.



(1p) *a*) Precizați $m(\widehat{AA';CC'})$;

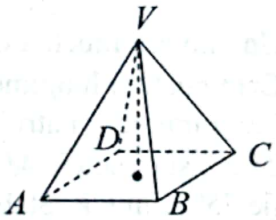
(1p) *b*) Precizați $m(\widehat{AA';AB})$;

(1p) *c*) Determinați $m(\widehat{AB;CC'})$;

(1p) *d*) Precizați $m(\widehat{AB;AC})$;

(1p) *e*) Determinați $m(\widehat{AB;A'C'})$.

2. În figura alăturată este reprezentată o piramidă cu baza pătratul $ABCD$ și cu toate muchiile congruente.



(1p) *a*) Determinați $m(\widehat{VBC})$;

(1p) *b*) Determinați $m(\widehat{VB;AD})$;

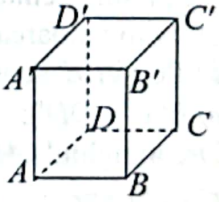
(1p) *c*) Justificați că $\Delta ABC \equiv \Delta AVC$;

(1p) *d*) Determinați $m(\widehat{AVC})$.

Notă. Timp de lucru 45 minute. Se acordă 1 punct din oficiu.

Testul 2

1. În figura alăturată este reprezentat un cub.



(1p) *a*) Precizați $m(\widehat{C'BC})$;

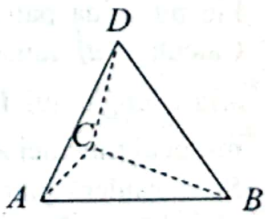
(1p) *b*) Determinați $m(\widehat{AD;BC'})$;

(1p) *c*) Justificați că $A'B = BC' = C'A'$;

(1p) *d*) Precizați $m(\widehat{A'BC'})$;

(1p) *e*) Determinați $m(\widehat{B'C;DC'})$.

2. În figura alăturată este reprezentat tetraedrul regulat $ABCD$.



(1p) *a*) Notați cu M mijlocul muchiei $[BC]$ și justificați că triunghiul AMD este isoscel;

(1p) *b*) Notați cu N mijlocul segmentului [AD] și justificați că $MN \perp AD$.

(1p) *c*) Arătați că $m(\widehat{MN;BC}) = 90^\circ$;

(1p) *d*) Precizați și justificați valoarea de adevăr a propoziției: "Două drepte perpendiculare pe o a treia dreaptă sunt perpendiculare între ele".

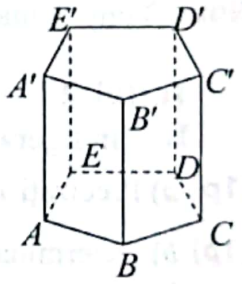
Notă. Timp de lucru 45 minute. Se acordă 1 punct din oficiu.

Scanned with OKEN Scanner

Testul 3

1. În paralelipipedul dreptunghic $ABCDA'B'C'D'$ punctul M este mijlocul muchiei $[AB]$.
   Stabiliți valoarea de adevăr a următoarelor propoziții:
   a) $BB' \parallel DD'$; *b)* $A'D \parallel B'C$;
   c) punctele B, C', D', A sunt coplanare;
2. Dreptunghiul $ABCD$ și pătratul $BCMN$ sunt situate în plane diferite $(N \notin (ABC))$ astfel încât $m(\widehat{ABN}) = 50°$. Se mai știe că $m(\widehat{ABD}) = 40°$. Determinați măsurile unghiurilor formate de perechile de drepte:
   a) AD și AB; *b)* AD și MB; *c)* NC și MB; *d)* AC și DC; *e)* AC și DB.
3. Fie tetraedrul regulat $VABC$ în care muchiile au lungimea de 12 cm. Calculați:
   a) suma lungimilor tuturor muchiilor; *b)* aria bazei;
   c) suma ariilor tuturor fețelor tetraedrului;
   d) $\sin(\widehat{AVM}) + \cos(\widehat{VBC}) + \operatorname{tg}(\widehat{ABC}) \cdot \operatorname{ctg}(\widehat{BCA})$ unde M este mijlocul muchiei AB.
4. Un cub are muchia de $7\sqrt{2}$ cm. Pe o față a cubului alegem două puncte M și N. Care poate fi lungimea maximă a segmentului $[MN]$?
5. Fie piramida patrulateră regulată $VABCD$ cu lungimea muchiei laterale de 24 cm și punctele $M \in [VA]$ astfel încât $VM = 6$ cm și $N \in [VC]$ astfel încât NC să fie 75% din CV. Stabiliți prin calcul poziția dreptelor MN și AC.

NOTĂ. Timp de lucru: 50 minute. Toate subiectele sunt obligatorii.
Din oficiu se acordă 10 puncte.



Testul 4

1. Fie prisma pentagonală regulată $ABCDEA'B'C'D'E'$.
   Stabiliți valoarea de adevăr a următoarelor propoziții:
   a) BC și EE' sunt drepte oarecare în spațiu;
   b) $B' \in (EDD')$; *c)* $CC' \parallel AB$;
2. Dreptunghiul $ABCD$ și triunghiul isoscel MBC sunt situate în plane diferite $(M \in (ABC))$ astfel încât $m(\widehat{DCM}) = 70°$, $MC = MB$ și $m(\widehat{CMB}) = 80°$. Determinați măsurile unghiurilor formate de perechile de drepte:
   a) AB și BC; *b)* AB și MC; *c)* MC și AD; *d)* BC și AD.
3. Fie piramida patrulateră regulată $VABCD$ în care $AB = 8$ cm și $VA = 10$ cm. Calculați: *a)* suma lungimilor tuturor muchiilor piramidei; *b)* aria fetei VAB; *c)* aria triunghiului VAC; *d)* $\sin(\widehat{VAM}) + \cos(\widehat{ACB}) - \operatorname{tg}(\widehat{CAD}) \cdot \operatorname{ctg}(\widehat{VBM})$ unde M este mijlocul muchiei AB.
4. Se consideră patru puncte distincte situate într-un plan α și un punct exterior planului α. Calculați numărul minim și numărul maxim de drepte și de plane determinate de cele cinci puncte date.
5. Calculați numărul de drepte determinate de câte două dintre vârfurile unei prisme triunghiulare.

NOTĂ. Timp de lucru: 50 minute. Toate subiectele sunt obligatorii.

Scanned with OKEN Scanner

Scanned with OKEN Scanner

Fişă pentru portofoliul individual

Numele şi prenumele: _____

Clasa a VIII-a ____ G2

Tema nr. II.2: Poziţiile relative a două drepte în spaţiu. Unghiul a două drepte în spaţiu. Drepte perpendiculare

(2p) 1. Completaţi spaţiile punctate astfel încât să obţineţi afirmaţii adevărate:

e) Două drepte care au un punct comun se numesc drepte.....

f) Măsura unghiului format de două drepte perpendiculare este de .....^{0}.

g) Măsura unghiului format de două drepte paralele este de .....^{0}.

h) Două drepte care nu sunt nici paralele, nici concurente se numesc drepte.....

(2p) 2. Pentru fiecare dintre enunţurile următoare, dacă enunţul este adevărat, încercuiţi litera „A", în caz contrar încercuiţi litera „F":

a)	Două drepte pot fi şi paralele, şi perpendiculare, în acelaşi timp.	A	F
b)	Unghiurile unui triunghi echilateral au măsura egală cu 60^0.	A	F
c)	Dacă trei drepte sunt paralele două câte două, atunci ele sunt coplanare.	A	F
d)	Există triunghiuri cu două unghiuri obtuze.	A	F

(2p) 3. Încercuiţi răspunsul corect la fiecare dintre următoarele exerciţii.
Dintre cele patru variante de răspuns, scrise la fiecare cerinţă, doar una este corectă.

a) Unghiurile unui hexagon regulat au măsurile egale cu:
A. 60^0 **B.** 90^0 **C.** 120^0 **D.** 150^0

b) Numărul punctelor comune pe care le au două drepte confundate este:
A. 1 **B.** 2 **C.** 3 **D.** O infinitate

c) Dacă $ABCD$ este un dreptunghi, atunci:
A. $AB \parallel BC$ **B.** $AD \parallel BC$ **C.** $m(\sphericalangle ACB) = 90^0$ **D.** $m(\sphericalangle ACD) = 45^0$

d) Dacă $ABCDA'B'C'D'$ este un cub, atunci:
A. $AA' \parallel CD$ **B.** $AA' \perp AB$ **C.** $BC = AC$ **D.** $AA' \perp BB'$

La următoarele subiecte scrieți pe fișa de evaluare rezolvările complete.

(1,5p) 4. Desenați paralelipipedul dreptunghic $ABCDA'B'C'D'$. Precizați poziția relativă a următoarelor drepte:

a) AB și CD; ***b)*** AA' și CC'; ***c)*** AA' și AD; ***d)*** AC și $A'B'$; ***e)*** $B'C'$ și AD.

(1,5p) 5. Pătratul $ABCD$ și rombul $CDEF$ sunt situate în plane diferite. Dacă $m(\sphericalangle ADE) = 70^0$ și $m(\sphericalangle DEF) = 50^0$, calculați măsurile unghiurilor formate de dreptele:

a) AC și BD; ***b)*** BC și DE; ***c)*** AB și EF; ***d)*** BD și EF; ***e)*** AB și DE.

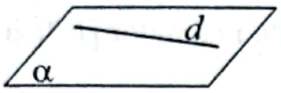
NOTĂ: Timp de lucru 50 minute. Se acordă un punct din oficiu.

Scanned with OKEN Scanner

2.6. Poziţiile relative ale unei drepte faţă de un plan. Dreaptă paralelă cu un plan

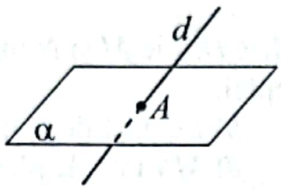
Se consideră dreapta d şi planul α. Relativ la planul α, dreapta d poate fi:

inclusă în planul α:



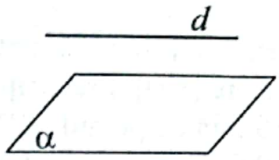
Notăm: $d \subset \alpha$

secantă planului α:



Notăm: $d \cap \alpha = \{A\}$

paralelă cu planul α:



Notăm: $d \cap \alpha = \varnothing$ sau $d \parallel \alpha$.

Condiţie suficientă de paralelism a unei drepte cu un plan

Fie o dreaptă d şi un plan α, $d \not\subset \alpha$. Dacă există o dreaptă e, $e \subset \alpha$, astfel încât $d \parallel e$, atunci $d \parallel \alpha$.

Teorema 1. Dacă $d \parallel \alpha$, $d \subset \beta$, $\alpha \cap \beta = e$, atunci $e \parallel d$ (vezi **Figura 1.**)

Teorema 2. Dacă $d \parallel \alpha$, $M \in \alpha$, $M \in e$, $e \parallel d$, atunci $e \subset \alpha$ (vezi **Figura 2.**)

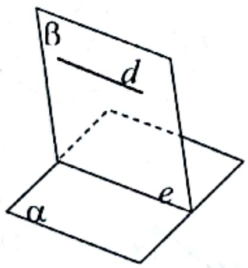


Figura 1.

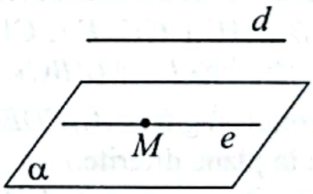
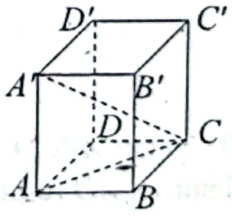


Figura 2.

*

1. Desenaţi paralelipipedul dreptunghic $ABCDA'B'C'D'$. Indicaţi şi justificaţi poziţia relativă la planul (ABC) a fiecăreia din următoarele drepte:



a) AC; *b)* $A'B'$; *c)* $A'C$;
d) AA'; *e)* BD; *f)* $D'B'$.

2. Desenaţi cubul $ABCDA'B'C'D'$ şi stabiliţi poziţia dreptei:

a) AB faţă de planul (BCC'); *b)* AC' faţă de planul (CDD');
c) AA' faţă de planul (ABB'); *d)* BB' faţă de planul (CDC');
e) BD faţă de planul (ABC); *f)* DD' faţă de planul $(A'B'C')$.

3. Trapezul $ABCD$ are baza $[AB]$ inclusă în planul α şi $C \notin \alpha$. Arătaţi că $CD \parallel \alpha$.

4. Punctele A şi B sunt situate în planul α, iar punctul C este exterior planului α. Fie M şi N mijloacele segmentelor $[AC]$, respectiv $[BC]$. Arătaţi că $MN \parallel \alpha$.

Scanned with OKEN Scanner

5. Fie punctele necoplanare A, B, C, D și punctele M, N, P, R mijloacele segmentelor $[BD]$, $[DC]$, $[CA]$ respectiv $[AB]$.

Arătați că $RP \parallel (BCD)$; $NP \parallel (BDA)$ și $MR \parallel (ADC)$.

6. Triunghiul ABC are latura $[BC]$ conținută în planul α, iar punctul A este exterior planului α. Segmentele $[BD]$ și $[CE]$, $D \in AC$, $E \in AB$ sunt mediane în triunghiul ABC. Demonstrați că $ED \parallel \alpha$.

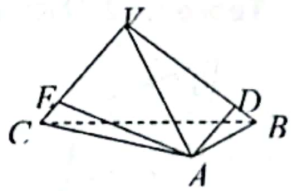
7. Desenați o piramidă patrulateră $VABCD$. Fie M și N mijloacele muchiilor $[VB]$ și respectiv $[VD]$. Precizați poziția dreptei:

a) AB față de planul (ADC); *b*) BC față de planul (VAD);
c) VB față de planul (ABC); *d*) MN față de planul (ABC);
e) VA față de planul (VBC); *f*) AN față de planul (VBC).

8. Triunghiul ABC are latura $[BC]$ inclusă în planul α, iar $A \notin \alpha$. Se știe că $AB = 6$ cm, $AC = 18$ cm, iar punctele E și F sunt situate pe laturile $[AB]$ și $[AC]$ astfel încât $AE = 2$ cm și $AF = 6$ cm. Justificați că $EF \parallel \alpha$.

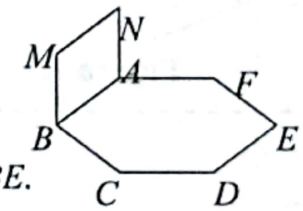
9. Triunghiul isoscel ABC are baza $[BC]$ inclusă în planul α, iar $A \notin \alpha$. Se știe că $AB = 6$ cm, iar punctele E și F sunt situate pe laturile $[AB]$ și $[AC]$ astfel încât $AE = 2$ cm și $CF = 4$ cm. Arătați că $EF \parallel \alpha$.

10. Se dă piramida $VABC$ cu $VA = VB = VC$ și $AB = BC = AC$. Se construiesc înălțimile $AD \perp VB$, $D \in VB$ și $AE \perp CV$, $E \in CV$.
Demonstrați că $ED \parallel (ABC)$.



11. Hexagonul regulat $ABCDEF$ și pătratul $ABMN$ sunt situate în plane diferite.

a) Ce poziție are dreapta CD față de planul (AMB) ?
b) Arătați că punctele C, F, N, M sunt coplanare.
c) Arătați că dreptele ME și DN sunt concurente.
d) Ce poziție are dreapta EF față de planul (CBM) ?
e) Calculați măsura unghiului format de dreptele MN și BE.



**

12. Trapezul $ABCD$ are baza AB inclusă în planul α. Notăm cu E și F mijloacele laturilor AD respectiv BC. Ce poziție are dreapta EF față de planul α?

13. Punctul M este exterior planului paralelogramului $ABCD$. Notăm cu E mijlocul segmentului $[AM]$.

a) Demonstrați că $CM \parallel (DEB)$;

b) Dacă, în plus, $MC = BD$, arătați că $BE \perp DE$.

14. Fie piramida patrulateră $VABCD$ în care notăm cu E și F centrele de greutate ale fețelor VAD și respectiv VBC. Arătați că dreapta EF este paralelă cu baza (ABC).

Scanned with OKEN Scanner

15. Fie paralelipipedul dreptunghic $ABCDA'B'C'D'$ în care M este mijlocul muchiei AA' iar N este mijlocul muchiei CC'.

a) Arătați că $MN \parallel (ABC)$;

b) Calculați lungimea segmentului $[MN]$ știind că $AB = 60$ cm și $BC = 25$ cm.

c) Dacă $AA' = 14$ cm calculați perimetrul patrulaterului $AMNC$.

***

16. Stabiliți valoarea de adevăr a fiecăreia dintre propozițiile:

a) Dacă o dreaptă este paralelă cu un plan, atunci ea este paralelă cu orice dreaptă inclusă în acel plan.

b) Dacă o dreaptă este paralelă cu un plan, atunci ea este paralelă cu o infinitate de drepte incluse în acel plan.

c) Dacă două drepte diferite sunt paralele cu același plan, atunci cele două drepte sunt paralele între ele.

d) Dacă dreptele a și b sunt paralele între ele și dreapta a este paralelă cu planul α, atunci dreapta b este inclusă în planul α.

e) Printr-un punct exterior unui plan dat putem duce o infinitate de drepte paralele cu planul dat.

f) Dacă dreptele a și b sunt necoplanare, atunci există un plan α care conține dreapta a și este paralel cu dreapta b.

17. Prin vârfurile triunghiului ABC trec drepte paralele între ele AA', BB', CC'. Se știe că $A' \notin (ABC)$, $AA' = BB' = CC'$ și toate punctele A', B', C' sunt situate de aceeași parte a planului (ABC). Fie M și N mijloacele segmentelor $[AA']$, respectiv $[BB']$. Demonstrați că:

a) $MN \parallel (ABC)$; *b)* $A'B' \parallel (CMN)$;

c) $CN \cap (AB'C') \neq \varnothing$; *d)* $AC \parallel (B'MP)$, unde P este mijlocul lui $[A'C']$.

18. Fie tetraedrul $VABC$ și punctele $M \in (VA)$, $N \in (VB)$, $P \in (CV)$ astfel încât $MN \parallel AB$ și $\frac{VN}{NB} = \frac{VP}{PC}$. Demonstrați că:

a) $NP \parallel (ABC)$; *b)* $MP \parallel (ABC)$.

19. Se consideră cubul $ABCDA'B'C'D'$. Notăm cu $\{O\} = AC \cap BD$.

a) Demonstrați că: $(A'C'B) \parallel AD'$;

b) Determinați $(A'C'B) \cap (DBB')$.

20. Desenați cubul $ABCDA'B'C'D'$.

a) Determinați $(A'C'A) \cap (DBC')$;

b) Arătați că $(C'BD) \cap A'C \neq \varnothing$.

c) Demonstrați că diagonala $A'C$ înțeapă planul $(C'BD)$ în centrul de greutate al triunghiului BDC'.

Scanned with OKEN Scanner

21. În prisma triunghiulară $ABCA'B'C'$ notăm cu M și N mijloacele muchiilor $[BC]$ și respectiv $[BB']$. Demonstrați că:

a) $B'C \parallel (AMN)$; *b)* $MN \parallel (CA'B')$.

22. Dreptunghiul $ABCD$ și triunghiul MAB sunt în plane diferite. Pe segmentele $[MA]$ și $[MB]$ se consideră punctele E și respectiv F astfel încât $ME = 8$ cm, $EA = 24$ cm, $MF = 9$ cm și $MB = 36$ cm. Arătați că $EF \parallel (MDC)$.

Probleme de șapte stele

23. Fie triunghiul dreptunghic ABC cu $m(\sphericalangle A) = 90°$, $AB = 36$ cm, $AC = 48$ cm și punctele $M \in [AB]$ astfel încât $AM = 12$ cm și $N \in [AC]$ astfel încât $\frac{AN}{NC} = \frac{1}{2}$.

a) Dacă latura BC a triunghiului este paralelă cu un plan α stabiliți poziția dreptei MN față de planul α.
b) Calculați lungimile segmentelor NC, MN și MC.
c) Calculați perimetrul triunghiului BMN.

24. Un plan este paralel cu două laturi ale unui triunghi. Arătați că planul este paralel și cu a treia latură a triunghiului.

25. Fie A, B, C, D patru puncte necoplanare și $M \in [AB]$. Prin M se construiește un plan α astfel încât $AD \parallel \alpha$ și $\alpha \parallel CB$, iar α intersectează dreptele BD, DC și CA respectiv în punctele N, P și R. Notăm $AM = x$ cm și se cunosc $AB = 8$ cm, $AD = 10$ cm și $CB = 15$ cm. Exprimați perimetrul patrulaterului $MNPR$.

Scanned with OKEN Scanner

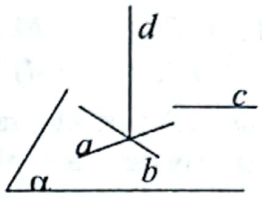
2.7. Dreaptă perpendiculară pe un plan. Distanța de la un punct la un plan. Înălțimea piramidei

Definiție. Dacă o dreaptă d este perpendiculară pe toate dreptele incluse într-un plan α, atunci dreapta d se numește *dreaptă perpendiculară* pe planul α.
Notăm $d \perp \alpha$ sau $\alpha \perp d$.

Condiție suficientă de perpendicularitate a unei drepte pe un plan

Dreapta d este perpendiculară pe planul α dacă d este perpendiculară pe două drepte concurente conținute în planul α. Cu alte cuvinte:

Dacă $\begin{cases} a \subset \alpha,\ b \subset \alpha,\ a \cap b \neq \varnothing \\ d \perp a,\ d \perp b \end{cases}$, atunci $d \perp \alpha$.



Consecință: Fie a și b două drepte concurente și o dreapta d, $d \perp (a;b)$.
Dacă dreapta c este inclusă în planul $(a; b)$, atunci $d \perp c$.

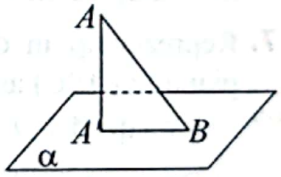
Teoremă. Dacă d este o dreaptă și A este un punct în spațiu, atunci există un unic plan α care conține punctul A și este perpendicular pe dreapta d.

Teoremă. Dacă α este un plan și A este un punct în spațiu, atunci există o unică dreaptă d care conține punctul A și este perpendiculară pe planul α.

Definiție. Dreptele care conțin punctul A, diferite de perpendiculara prin A pe planul α, se numesc *oblice* în raport cu α.

Distanța de la un punct la un plan

Definiție. Fie α este un plan, A un punct în spațiu și A' piciorul perpendicularei din A planul α.
Lungimea segmentului AA' se numește *distanța* de la punctul A la planul α. Notăm $d(A;\alpha) = AA'$.

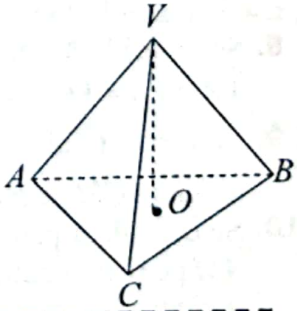


Observație. Dacă punctul A exterior planului α, dreapta AA', $A' \in \alpha$, este perpendiculara pe planul α, iar dreapta AB, $B \in \alpha$, este o oblică oarecare, atunci $AB > AA'$.

Înălțimea unei piramide

Definiție. Se consideră o piramidă cu vârful V și baza inclusă în planul α. Fie O piciorul perpendicularei din V pe planul α.

Segmentul $[VO]$ se numește *înălțimea piramidei*.
Notăm $h = VO = d(V;\alpha)$.

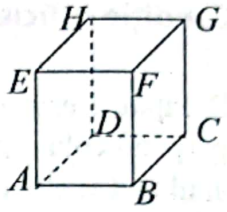


Scanned with OKEN Scanner

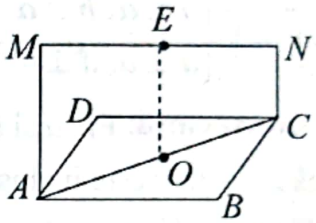
*

1. Desenați cubul $ABCDA'B'C'D'$ și indicați:
a) trei drepte perpendiculare pe planul (ABC);
b) trei drepte perpendiculare pe planul (ADD');
c) două drepte perpendiculare pe planul $(AA'B)$;
d) trei drepte perpendiculare pe planul $(A'B'C')$.

2. În figura alăturată este reprezentat un cub $ABCDEFGH$. Justificați că:
a) $EA \perp (ABC)$; *b)* $DB \perp EA$;
c) $AC \perp HD$; *d)* $DB \perp (EAC)$.



3. Se consideră paralelogramul $ABCD$ cu centrul O. De aceeași parte a planului (ABC) se ridică perpendicularele $MA \perp (ABC)$ și $NC \perp (ABC)$ astfel încât $MA = 18$ cm și $NC = 12$ cm. Punctul E este mijlocul segmentului $[MN]$ (vezi figura).
a) Arătați că $OE \perp (ABC)$;
b) Determinați lungimea segmentului $[OE]$.



4. Reprezentați în desen un plan α, punctele A și B situate în planul α și perpendiculara BM pe planul α. Dacă $AB = 6$ cm și $BM = 8$ cm, calculați AM.

5. Reprezentați în desen un plan α, un triunghi echilateral ABC inclus în α și perpendiculara CP pe planul α.
a) Justificați că $CP \perp AB$. *b)* Arătați că $PA = PB$;
c) Dacă $AB = 5$ cm și $CP = 12$ cm, calculați PA.

6. Desenați un pătrat $ABCD$ de centru O și perpendiculara OM pe planul pătratului.
a) Arătați că $MA = MB = MC = MD$. *b)* Dacă $MA = AB = 6$, calculați OM.

7. Reprezentați în desen un dreptunghi $ABCD$ de centru O și punctul V exterior planului (ABC) astfel încât $VA = VB = VC = VD$.
a) Arătați că $VO \perp AC$; *b)* Arătați că $VO \perp (ACD)$;
c) Dacă $VA = AB = 6$ cm și $BC = 2\sqrt{3}$, calculați $d\big(V;(ABC)\big)$.

**

8. Se consideră punctul V în exteriorul planului pătratului $ABCD$ astfel încât $VA = VB = VC = VD$. Notăm cu $\{O\} = AC \cap BD$. Demonstrați că $VO \perp (ABC)$.

9. În vârful C al triunghiului dreptunghic ABC cu $m(\sphericalangle A) = 90°$ se ridică perpendiculara CM pe planul triunghiului. Arătați că $BA \perp (MAC)$.

10. Se consideră pătratul $ABCD$ cu $AB = 4$ cm. În punctul A se ridică perpendiculara AM pe planul pătratului. Se știe că $AM = 4$ cm.
a) Calculați AC; *b)* Justificați că triunghiul MAC este dreptunghic;
c) Calculați MC; *d)* Verificați dacă triunghiul MBC este dreptunghic.

Scanned with OKEN Scanner

11. Pe planul pătratului $ABCD$ se ridică perpendiculara AM. Știind că $AB = 6$ cm și $AM = 3\sqrt{2}$ cm, calculați:

a) $d(M, AD)$; *b)* $d(C, (MAB))$; *c)* $d(D, (MAC))$.

12. În centrul O al triunghiului echilateral ABC, se ridică perpendiculara OV pe planul (ABC).

a) Arătați că $VA = VB = VC$; *b)* Dacă $VA = AB = 6$ cm, calculați $d(V, (ABC))$.

13. Precizați valoarea de adevăr a propoziției:

a) Dacă dreapta d este perpendiculară pe două drepte conținute în planul α, atunci $d \perp \alpha$.

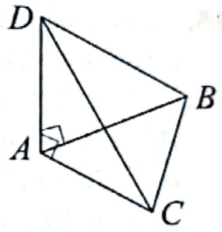
b) Dacă dreptele diferite a și b sunt perpendiculare pe planul α, atunci $a \parallel b$.

c) Dacă dreptele a și b sunt paralele și planul α este perpendicular pe dreapta a, atunci $\alpha \perp b$.

d) Dacă a, b și c sunt drepte astfel încât $a \perp b$ și $b \perp c$, atunci $c \perp a$.

14. Se consideră rombul $ABCD$ și V un punct în exteriorul planului (ABC) astfel încât $VA = VC$. Arătați că $AC \perp (VBD)$.

15. Se consideră tetraedrul $ABCD$ în care $AB \perp AC \perp AD \perp AB$.



a) Demonstrați că muchiile opuse ale tetraedrului $ABCD$ sunt perpendiculare două câte două.

b) Dacă $M \in BC$ astfel încât $AM \perp BC$, arătați că $BC \perp DM$.

c) Dacă $AB = 30$ cm, $AC = 40$ cm și $AD = 18$ cm, calculați aria triunghiului BDC.

16. Se consideră paralelipipedul dreptunghic $ABCDA'B'C'D'$ în care $AB = 3$ cm, $BC = 4$ cm și $BB' = 12$ cm.

a) Determinați $d\big(D;(C'B'B)\big)$; *b)* Calculați $A'C$.

17. Se consideră cubul $ABCDA'B'C'D'$.

a) Arătați că $BA' \perp (ADB')$; *b)* $AC' \perp (A'BD)$;

c) Dacă $AB = l$, calculați $A'C$.

18. În vârful C al triunghiului dreptunghic ABC cu $m(\sphericalangle A) = 90°$ se ridică perpendiculara CD pe planul triunghiului.

a) Calculați $d\big(B;(DAC)\big)$; *b)* Justificați că $DA \perp AB$;

c) Știind că $AB = CD = 8$ cm și $AC = 8\sqrt{3}$ cm, calculați $d\big(D;AB\big)$.

19. Pe planul triunghiului ABC se ridică în A perpendiculara DA. Dacă $BC = a$, $DB = a\sqrt{6}$, $DC = a\sqrt{7}$, $DA = a\sqrt{5}$, arătați că triunghiul ABC este dreptunghic.

20. Fie O proiecția vârfului V al piramidei $VABC$ pe planul bazei (ABC). Demonstrați că punctul O este centrul cercului circumscris triunghiului ABC dacă și numai dacă $VA = VB = VC$.

21. Fie triunghiul echilateral ABC și V un punct exterior planului (ABC) astfel încât $VA = VB = CV = 12$ cm și $AB = 10\sqrt{3}$ cm. Calculați distanța de la punctul V la planul (ABC).

Scanned with OKEN Scanner

22. Desenați piramida hexagonală $VABCDEF$ cu baza $ABCDEF$ și muchiile laterale congruente. Dacă $AB = 6$ cm și $VA = 10$ cm, calculați înălțimea piramidei .

23. Desenați piramida patrulateră $VABCD$ cu baza pătratul $ABCD$ de centru O și muchiile laterale congruente. Fie M mijlocul segmentului $[BC]$.

a) Arătați că $VO \perp (ABC)$; *b)* Dacă $AB = 10$ cm și $VO = 12$ cm, calculați VM;

c) Dacă $OP \perp VM$, $P \in VM$, calculați OP; *d)* Demonstrați că $OP \perp (VBC)$.

***

24. Fie prisma triunghiulară dreaptă $ABCA'B'C'$ cu baza triunghiul echilateral ABC și E mijlocul muchiei $[BB']$. Dacă $\{D\} = AB \cap A'E$, arătați că:

a) triunghiul ADC este dreptunghic; *b)* $DC \perp (ACC')$.

25. Triunghiurile ABC și ADE sunt dreptunghice în A. Dacă $BC \cap DE = \{O\}$, iar $AO \perp (BCD)$, arătați că punctele B, C, D și E sunt conciclice.

26. Arătați că, dacă muchiile laterale ale unei piramide sunt congruente, atunci baza piramidei este poligon inscriptibil, iar înălțimea piramidei conține centrul bazei.

27. Pe planul pătratului $ABCD$ de centru O și $AB = 24$ cm se ridică perpendicularele AM și CN astfel încât $AM = 18$ cm și $CN = 16$ cm. Calculați :

a) distanța de la punctul B la planul (AMN);

b) distanța de la punctul O la dreapta MN;

28. Pe planul triunghiului echilateral ABC cu $AB = 8$ cm se ridică perpendicularele CC' și BB' cu $CC' = 12$ cm. Calculați lungimea BB' astfel încât:

a) triunghiul $AB'C'$ să fie dreptunghic în C';

b) triunghiul $AB'C'$ să fie isoscel cu $B'C' = B'A$.

29. Considerăm triunghiul echilateral ABC cu latura de 10 cm. În punctele C și B se ridică perpendicularele CC' și BB' pe planul (ABC). Punctele C' și B' sunt situate de o parte și de alta a planului (ABC) astfel încât $BB' = CC' = x > 0$.
Să se determine x astfel încât triunghiul $AB'C'$ să fie dreptunghic.

Probleme de șapte stele

30. Fie triunghiul isoscel ABC cu $AB = AC = 30$ cm și $BC = 36$ cm și D mijlocul laturii $[BC]$. În punctul A se ridică perpendiculara $AM = 10$ cm pe planul (ABC).

a) Calculați lungimile MB și MD.

b) Fie $[AE$ și $[AF$ bisectoarele unghiurilor MAB și MAC, $E \in [MB]$, $F \in [MC]$. Arătați că $EF \parallel (ABC)$;

c) Calculați lungimea segmentului $[EF]$.

31. Dintr-un punct O exterior unui plan α se duc perpendicularele OD, OE, OF pe dreptele diferite BC, CA, AB conținute în α. Demonstrați relația $BD^2 - DC^2 + CE^2 - EA^2 + AF^2 - FB^2 = 0$.

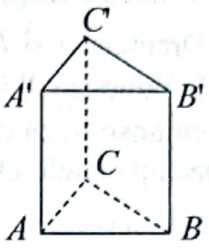
32. Se consideră cubul $ABCDA'B'C'D'$. Dacă $AC \cap BD = \{O\}$, iar punctul M este centrul de greutate al triunghiului BCB', arătați că $D'O \perp (AMC)$.

Scanned with OKEN Scanner

E TESTE DE EVALUARE

Testul 1

1. În figura alăturată este reprezentată o prismă dreaptă în care baza ABC este triunghi echilateral. Notăm cu M mijlocul segmentului $[BC]$. Justificați că:



(1p) *a)* $A'B' \parallel (ABC)$;

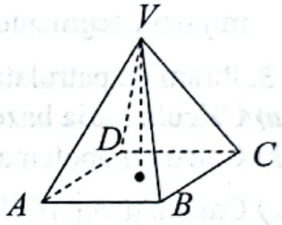
(1p) *b)* $AA' \perp (ABC)$;

(1p) *c)* $AM \parallel (A'B'C')$;

(1p) *d)* $AM \perp BC$;

(1p) *e)* $BC \perp A'M$.

2. În figura alăturată este reprezentată o piramidă cu baza pătratul $ABCD$ și cu toate muchiile congruente. Notați cu O centrul bazei.



(1p) *a)* Justificați că $BC \parallel (VAD)$;

(1p) *b)* Arătați că $VO \perp (ABC)$;

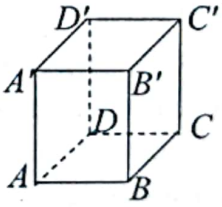
(2p) *c)* Dacă M este mijlocul muchiei $[VA]$, arătați că:

i) $VC \parallel (MDB)$; *ii)* $AV \perp (MDB)$.

Notă: Timp de lucru 45 minute. Se acordă 1 punct din oficiu.

Testul 2

1. În figura alăturată este reprezentat un paralelipiped dreptunghic. Se știe că $AB = 120$ cm, $BC = 40$ cm și $CC' = 30$ cm.



(1p) *a)* Justificați că $A'C' \parallel (ABD)$;

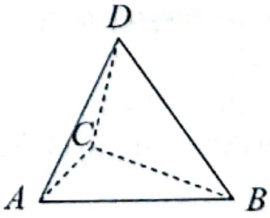
(1p) *b)* Justificați că $AB \perp (BCC')$;

(1p) *c)* Arătați că $AB \perp BC'$;

(1p) *d)* Calculați BC';

(1p) *e)* Calculați AC'.

2. În figura alăturată este reprezentat tetraedrul $ABCD$ în care triunghiul ABC este echilateral iar triunghiurile DAB, DBC și DCA sunt isoscele și dreptunghice în D. Se știe că $AB = 6$ cm.



1p) *a)* Justificați că $AD \perp (BCD)$;

(1p) *b)* Arătați că $BC \perp AD$;

(1p) *c)* Calculați $d(D;(ABC))$;

(1p) *d)* Calculați $d(D;AB)$;

Notă: Timp de lucru 45 minute. Se acordă 1 punct din oficiu.

Scanned with OKEN Scanner

Testul 3

(1p) 1. Completați spațiile punctate din următoarele afirmații astfel încât să obțineți enunțuri corecte:

a) Înălțimea unei piramide este ……;

b) Înălțimea unei prisme este ……

(4p) 2. Dreptele a și b, concurente în punctul M exterior planului α, intersectează planul α în punctele A respectiv B.

a) Demonstrați că dreapta $AB \subset \alpha$.

b) Dacă punctele D și E sunt mijloacele segmentelor $[MA]$ respectiv $[MB]$ arătați că $DE \parallel \alpha$.

c) Dacă $D \in (MA)$, $E \in (MB)$, cu $MD = 4$ cm, $DA = 12$ cm, $ME = 7$ cm și $EB = 21$ cm stabiliți poziția dreptei DE față de planul α.

d) Pe dreptele a și b se consideră punctele A' și respectiv B' astfel încât M să fie mijlocul segmentelor AA' și BB'. Stabiliți poziția dreptei $A'B'$ față de planul α.

(4p) 3. Piramida patrulateră regulată $VABCD$ are toate muchiile cu lungimea de 4 cm.

a) Calculați aria bazei.

b) Calculați apotema piramidei (înălțimea unei fețe laterale).

c) Calculați $m(\widehat{ACV})$.

d) Demonstrați că muchia $CV \parallel (MBD)$ unde M este mijlocul muchiei $[VA]$.

NOTĂ: Timp de lucru 45 minute. Se acordă 1 punct din oficiu.

Scanned with OKEN Scanner

Fişă pentru portofoliul individual

Numele şi prenumele: _____

Clasa a VIII-a ____ G3

Tema nr. II.3: Poziţiile relative ale unei drepte faţă de un plan. Dreaptă perpendiculară pe plan. Distanţa de la un punct la un plan. Înălţimea unei piramide

(2p) 1. Completaţi spaţiile punctate astfel încât să obţineţi afirmaţii adevărate:

i) O dreaptă care nu are niciun punct comun cu un plan este..... cu planul.

j) Dacă o dreaptă are două puncte comune cu un plan, atunci ea este..... în plan.

k) Distanţa de la vârful unei piramide la planul bazei se numeşte..... piramidei.

l) Muchiile laterale ale unui cub sunt.....pe bazele cubului.

(2p) 2. Pentru fiecare dintre enunţurile următoare, dacă enunţul este adevărat, încercuiţi litera „A", în caz contrar încercuiţi litera „F":

a) Dacă o dreaptă este perpendiculară pe o dreaptă dintr-un plan, atunci ea este perpendiculară pe acel plan. **A** **F**

b) Dacă o dreaptă este paralelă cu o dreaptă dintr-un plan, atunci ea este paralelă cu planul. **A** **F**

c) Dacă o dreaptă este paralelă cu un plan, atunci ea este paralelă cu toate dreptele din acel plan. **A** **F**

d) Dacă două drepte sunt perpendiculare pe acelaşi plan, atunci ele sunt paralele. **A** **F**

(1,5p) 3. Încercuiţi răspunsul corect la fiecare dintre următoarele exerciţii.

Dintre cele patru variante de răspuns, scrise la fiecare cerinţă, doar una este corectă.

a) Numărul dreptelor duse printr-un punct exterior unui plan, paralele cu planul, este:

A. 1 **B.** 2 **C.** 3 **D.** O infinitate

b) Numărul dreptelor duse printr-un punct exterior unui plan, perpendiculare pe acel plan, este:

A. 1 **B.** 2 **C.** 3 **D.** O infinitate

c) Numărul dreptelor duse printr-un punct exterior unei drepte, paralele cu acea dreaptă, este:

A. 1 **B.** 2 **C.** 3 **D.** O infinitate

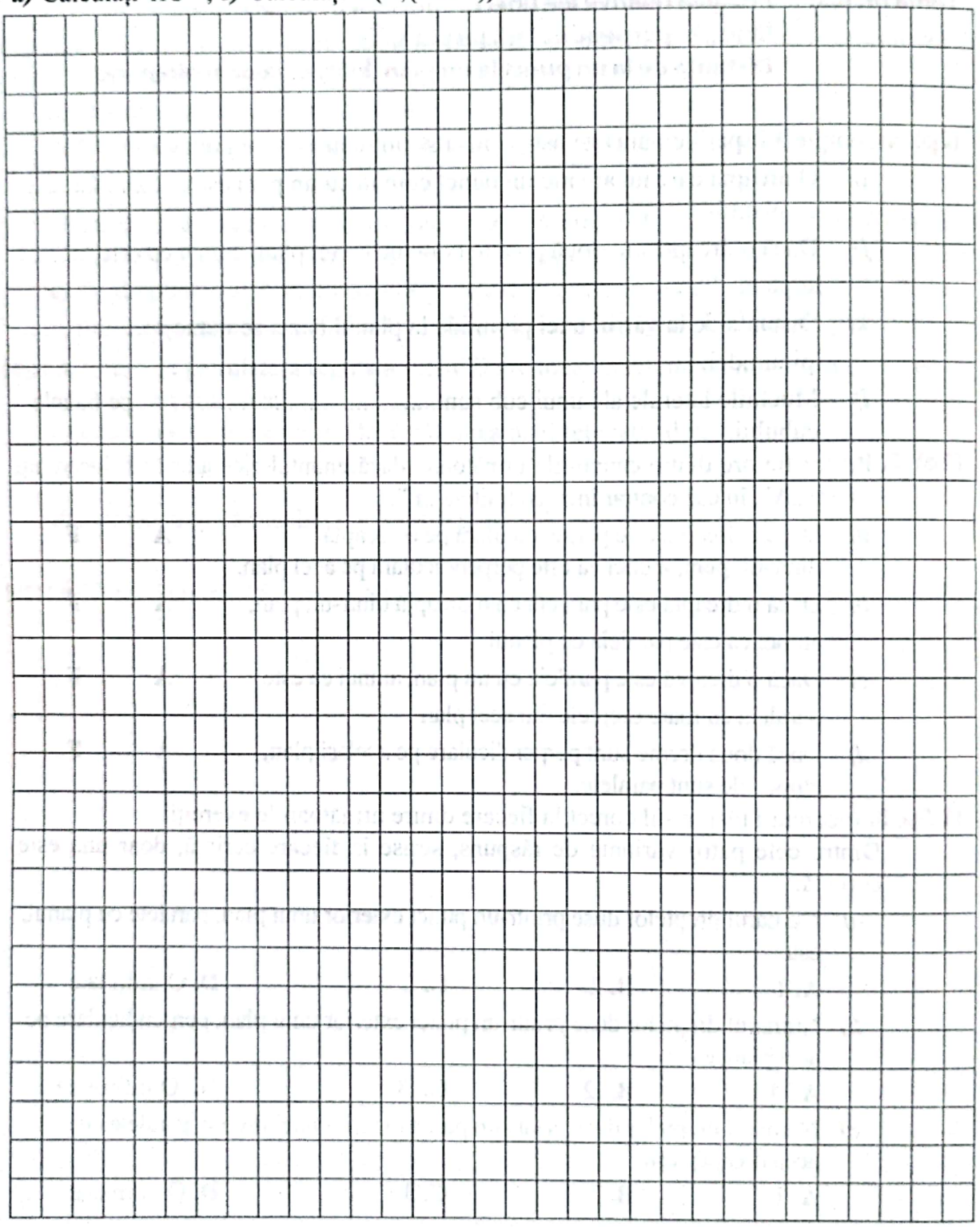
Scanned with OKEN Scanner

La următorul subiect scrieți pe fișa de evaluare rezolvările complete.

(3,5p) 4. Desenați paralelipipedul dreptunghic $ABCDA'B'C'D'$. Se știe că $AB = AA' = 6$ cm și $BC = 8$ cm.

a) Arătați că $AB \perp (BCC')$; ***b)*** Arătați că $AA' \parallel (BCC')$; ***c)*** Calculați AC ;

d) Calculați AC' ; ***e)*** Calculați $d(A;(BDD'))$.

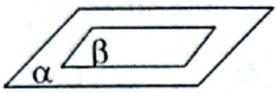


NOTĂ: Timp de lucru 50 minute. Se acordă un punct din oficiu.

Scanned with OKEN Scanner

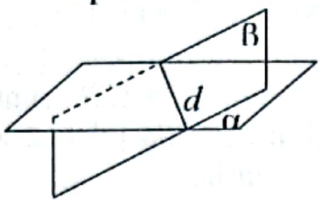
2.8. Poziţiile relative a două şi trei plane. Plane paralele. Teoreme de paralelism

A. plane care *coincid*



notăm $\alpha = \beta$

B. plane *secante*



notăm $\alpha \cap \beta = d$

C. plane *paralele*

$\alpha \cap \beta = \varnothing$

notăm $\alpha \parallel \beta$

Observaţie. $\alpha = \beta$ dacă şi numai dacă $\alpha \subset \beta$ şi $\beta \subset \alpha$.

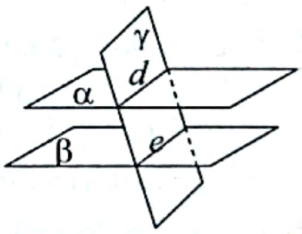
Lemă. Fie planele α şi β şi dreptele a şi b, $a \subset \alpha$ şi $b \subset \beta$. Dacă $a \parallel b$ şi $\alpha \cap \beta = d$, atunci $a \parallel d \parallel b$.

Condiţie suficientă de paralelism a două plane

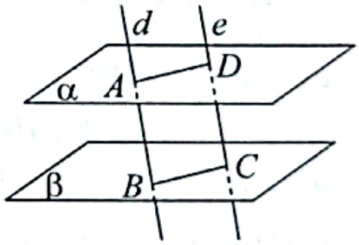
Două plane sunt paralele dacă unul dintre ele conţine două drepte concurente paralele cu cel de-al doilea plan.

Teoreme de paralelism

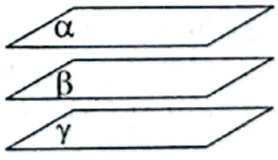
Teoremă. Fie planele α, β şi γ. Dacă $\alpha \parallel \beta$ şi $\alpha \cap \gamma = d$, atunci există dreapta e astfel încât $\beta \cap \gamma = e$, iar $d \parallel e$.



Teoremă. Fie planele paralele α, β şi dreptele paralele d şi e. Dacă $d \cap \alpha = \{A\}$, atunci există punctele B, C şi D astfel încât $\{B\} = d \cap \beta$, $\{D\} = e \cap \alpha$ şi $\{C\} = e \cap \beta$. În plus, $[AB] \equiv [DC]$.
(Două plane paralele determină pe două drepte paralele, pe care le intersectează, segmente congruente.)



Teoremă (tranzitivitatea relaţiei de paralelism)
Fie planele α, β şi γ. Dacă $\alpha \parallel \beta$ şi $\beta \parallel \gamma$, atunci $\gamma \parallel \alpha$
(două plane paralele cu un al treilea plan sunt paralele între ele).



Teoremă. Fie α şi β două plane paralele şi punctele $A \in \alpha$, $B \in \beta$.
Dacă $AB \perp \alpha$, atunci $AB \perp \beta$.

În condiţiile teoremei de mai sus, lungimea segmentului AB se numeşte *distanţa dintre planele* α şi β. Notăm $AB = d(\alpha;\beta)$.

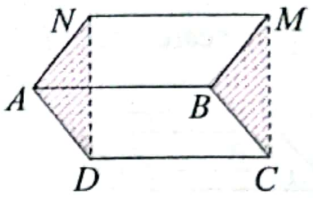
Teorema lui Thales în spaţiu

Trei sau mai multe plane paralele determină pe două drepte oarecare, pe care le intersectează, segmente proporţionale.

Scanned with OKEN Scanner

*

1. Deschizând o carte se obține o configurație ca în desenul alăturat. Precizați și demonstrați poziția planelor (ADN) și (BCM).



2. Trapezul $ABB'A'$ și paralelogramul $BCC'B'$ sunt situate în plane diferite. Stabiliți poziția relativă a planelor (ABC) și $(A'B'C)$, în cazurile:

a) $AB \parallel A'B'$; *b)* $AA' \parallel BB'$.

3. Desenați cubul $ABCDA'B'C'D'$.

a) Justificați că $(ADD') \parallel (BCC')$; *b)* Arătați că $A'B' \perp (BCC')$;

c) Dacă $AC' = 28\sqrt{3}$ cm, calculați distanța dintre două fețe opuse ale cubului.

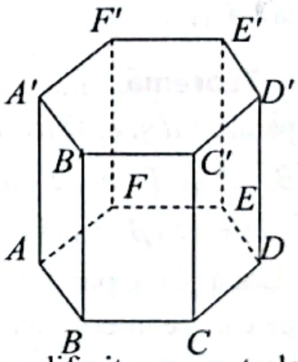
4. Se consideră piramida $VABCD$ cu baza pătratul $ABCD$ și notăm cu M, N, P, Q mijloacele muchiilor laterale VA, VB, CV respectiv VD.

a) Stabiliți poziția planelor (ABC) și (MNP).

b) Determinați raportul perimetrelor patrulaterelor $MNPQ$ și $ABCD$.

5. În exteriorul pătratului $ABCD$ se consideră punctul M astfel încât $MA = MB = MC = MD$. Un plan α paralel cu planul (ABC) taie segmentele $[MA]$ în A', $[MB]$ în B', $[MC]$ în C' și $[MD]$ în D'. Știind că $AB = 2a$, $A'B' = a$ și că $d\big(M;(ABC)\big) = 2b$, să se calculeze distanța dintre planele α și (ABC).

6. Fie prisma dreaptă $ABCDEFA'B'C'D'E'F'$ în care baza este hexagonul regulat $ABCDEF$ (vezi figura alăturată).



Arătați că:

a) $(AFF') \parallel (CDD')$; *b)* $(BEE') \parallel (CDD')$;

c) Planele (BEE'), (ADD') și (CFF') au o dreaptă comună.

d) Dacă $(BCC') \cap (DEE') = d$, atunci $d \parallel DD'$.

e) Dacă $AB = a$, calculați $d\big((AFF');(CDD')\big)$.

7. Se consideră paralelogramele $ABCD$ și $ABEF$ situate în plane diferite cu centrele O și respectiv O'. Arătați că:

a) $(BEC) \parallel (AFD)$; *b)* $OO' \parallel FD$; *c)* $OO' \parallel (BEC)$.

**

8. Prin vârfurile triunghiului ABC trec dreptele paralele $AA' \parallel BB' \parallel CC'$, astfel încât A', B' și C' să fie de aceeași parte a planului triunghiului ABC. Fie G și G' centrele de greutate ale triunghiurilor ABC și respectiv $A'B'C'$. Notăm cu M și M' mijloacele segmentelor $[AB]$ respectiv $[A'B']$. Arătați că:

a) $MM' \parallel BB'$; *b)* Punctele C, C', M, M' sunt coplanare; *c)* $GG' \parallel (ABB')$.

9. Triunghiul dreptunghic ABC ($m(\sphericalangle A) = 90°$) și dreptunghiul $ABMN$ sunt situate în

Scanned with OKEN Scanner

plane diferite. Stabiliți poziția dreptei AB față de planul (ACN).

10. Precizați și justificați valoarea de adevăr a propoziției:

a) Dacă două plane sunt paralele, atunci orice dreaptă conținută într-unul dintre plane este paralelă cu celălalt plan.

b) Dacă două plane sunt paralele, atunci orice dreaptă conținută într-unul dintre plane este paralelă cu o infinitate de drepte conținute în celălalt plan.

c) Dacă două plane sunt paralele, atunci orice dreaptă conținută într-unul dintre plane este paralelă cu orice dreaptă conținută în celălalt plan.

d) Date fiind planele neparalele α și β și un punct M în spațiu, $M \notin \alpha$, $M \notin \beta$, există o unică dreaptă d care conține punctul M și este paralelă cu planele α și β.

e) Date fiind planele α și β, există o dreaptă a, $a \subset \alpha$, astfel încât $a \parallel \beta$.

f) Date fiind două drepte necoplanare a, b și punctul M, $M \notin a, M \notin b$, atunci există un plan care conține punctul M și este paralel cu dreptele a și b.

g) Dacă două plane diferite sunt perpendiculare pe aceeași dreaptă, atunci cele două plane sunt paralele între ele.

h) Este suficient ca două plane să fie paralele cu aceeași dreaptă pentru ca cele două plane să fie paralele între ele.

i) Dacă două plane diferite sunt paralele cu două drepte necoplanare, atunci cele două plane sunt paralele.

11. Punctele A, B, C și D sunt necoplanare. Fie M, N și P mijloacele segmentelor $[AB]$,$[AC]$ și respectiv $[AD]$.

a) Arătați că $(MNP) \parallel (BCD)$.

b) Arătați că triunghiurile MNP și BCD sunt asemenea.

c) Calculați valoarea raportului perimetrelor triunghiurilor MNP și BCD.

d) Calculați valoarea raportului ariilor triunghiurilor MNP și BCD.

12. Punctele A, B, C și D sunt necoplanare. Fie M, N și P mijloacele segmentelor $[BC]$, $[CD]$ și respectiv $[DB]$, iar G_1, G_2 și G_3 centrele de greutate ale triunghiurilor ABC, ACD și respectiv ADB.

a) Arătați că $G_1G_2 \parallel (BCD)$. *b)* Demonstrați că $(G_1G_2G_3) \parallel (BCD)$.

c) Calculați valoarea raportului perimetrelor triunghiurilor $G_1G_2G_3$ și BCD.

d) Calculați valoarea raportului ariilor triunghiurilor $G_1G_2G_3$ și BCD.

13. Se consideră punctele necoplanare A, B, C și D și punctul M, $M \in (AD)$. Planul α, care conține punctul M și este paralel cu dreptele AB și CD, intersectează dreptele DB, BC și CA în punctele N, P și respectiv Q. Arătați că:

a) $MN \parallel AB$; *b)* $NP \parallel DC$;

c) $MNPQ$ este paralelogram; *d)* $AM \cdot CP = DM \cdot BP$.

14. Se consideră paralelipipedul $ABCDA'B'C'D'$ în care O și O' sunt centrele bazelor $ABCD$ și respectiv $A'B'C'D'$.

a) Arătați că $(A'BD) \parallel (CB'D')$; *b)* Determinați $(ACC') \cap (CB'D')$;

c) Dacă $AC' \cap (A'BD) = \{G_1\}$ și $AC' \cap (CB'D') = \{G_2\}$, arătați că punctele G_1 și

Scanned with OKEN Scanner

G_2 sunt centrele de greutate ale triunghiurilor $A'BD$ şi respectiv $CB'D'$.

d) Arătaţi că $AG_1 = G_1G_2 = G_2C'$.

15. Se consideră cubul $ABCDA'B'C'D'$ în care $AB = a$.

a) Arătaţi că $(A'BD) \parallel (CB'D')$; *b*) Arătaţi că $AC' \perp (CB'D')$;

c) Calculaţi $d\big((A'BD);(CB'D')\big)$.

***

16. Se consideră cubul $ABCDA'B'C'D'$ în care $AB = a$. Se notează cu M, N, P, R, S şi T mijloacele muchiilor $[AD]$, $[AB]$, $[B'C']$, $[C'D']$, $[BC]$ şi respectiv $[DC]$.

a) Arătaţi că patrulaterul $MNPR$ este dreptunghi;

b) Arătaţi că $PS \perp (ABC)$; *c*) Calculaţi $d\big((PSN);(RTM)\big)$.

17. Dacă d şi g sunt două drepte necoplanare, arătaţi că există un plan şi numai unul care să conţină pe una din ele şi să fie paralel cu cealaltă.

18. Se consideră planele paralele α şi β şi punctele A, B, C şi D astfel încât $AB \subset \alpha$ şi $DC \subset \beta$. Punctele M şi N sunt situate pe segmentele (AD) şi (BC). Dacă $\frac{MA}{MD} = \frac{NB}{NC}$, arătaţi că $MN \parallel \alpha$.

19. Se consideră planele α şi β astfel încât $\alpha \cap \beta = d$ şi planul γ, $\gamma \parallel d$. Dacă $\gamma \cap \alpha = a$ şi $\gamma \cap \beta = b$, demonstraţi că $a \parallel b$.

20. Se consideră planele α şi β şi două drepte a şi b, $a \subset \alpha$ şi $b \subset \beta$. Dacă $a \parallel \beta$, $b \parallel \alpha$ şi $a \nparallel b$, arătaţi că planele α şi β sunt paralele.

Probleme de şapte stele

21. Se consideră planele α, β, γ paralele între ele. Punctele A şi B sunt situate în planul α, iar punctele C şi D sunt situate în planul β. Fie $\{M\} = AC \cap \gamma$, $\{N\} = AD \cap \gamma$, $\{P\} = BD \cap \gamma$ şi $\{Q\} = BC \cap \gamma$. Arătaţi că, dacă punctele A, B, C şi D sunt necoplanare, atunci punctele M, N, P şi Q sunt vârfurile unui paralelogram. (Analizaţi situaţiile posibile după poziţiile celor trei plane).

22. Se consideră semidreptele necoplanare $[Ox$, $[Oy$ şi $[Oz$ şi punctele $A, B \in (Ox$, $C, D \in (Oy$ şi $E, F \in (Oz$. Dacă $\{M\} = AC \cap BD$, $\{N\} = CE \cap DF$ şi $\{P\} = AE \cap FB$, arătaţi că punctele M, N, şi P sunt coliniare. (*Desargues*)

23. Se consideră tetraedrul $ABCD$ şi punctele $M \in (AB), N \in (BD), P \in (DC)$ şi $Q \in (CA)$. Arătaţi că punctele M, N, P şi Q sunt coplanare dacă şi numai dacă $\frac{MA}{MB} \cdot \frac{NB}{ND} \cdot \frac{PD}{PC} \cdot \frac{NC}{NA} = 1$. (*Menelaos*)

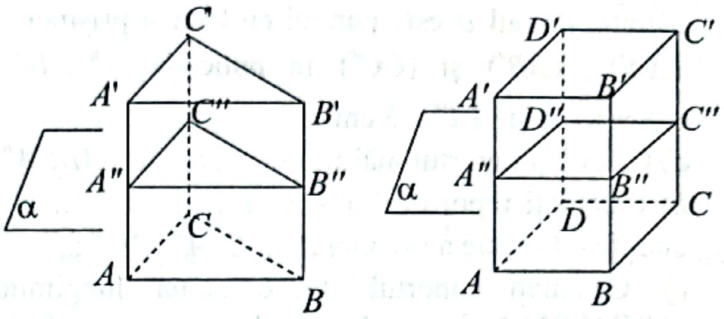
Scanned with OKEN Scanner

2.9. Secțiuni paralele cu baza în corpurile studiate. Trunchiul de piramidă

Intersecția dintre interiorul unui corp geometric și un plan se numește *secțiune*.

În figurile alăturate este reprezentată secțiunea realizată într-o prismă de un plan α paralel cu bazele.

Corpurile rezultate sunt *prisme* de același nume cu prisma inițială.



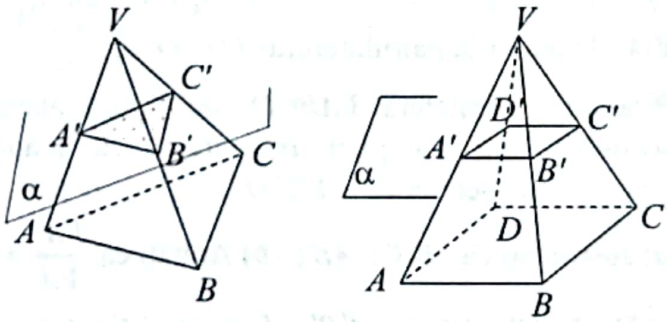
Definiție. Distanța dintre planele celor două baze ale unei prisme se numește *înălțimea prismei.*

Observație. Lungimea muchiei laterale a unei prisme drepte este egală cu înălțimea prismei.

Definiție. O prismă dreaptă care are ca bază un poligon regulat se numește *prismă regulată.*

În figurile alăturate este reprezentată secțiunea realizată într-o piramidă de un plan α paralel cu baza.

Cele două corpuri rezultate sunt: o *piramidă* asemenea cu piramida inițială și un *trunchi de piramidă.*



Definiție: O piramidă care are ca bază un poligon regulat și a cărei înălțime conține centrul bazei se numește *piramidă regulată.*

Definiție: Segmentul determinat de vârful unei *piramide regulate* și mijlocul unei muchii a bazei se numește *apotemă a piramidei.*

Definiție: Distanța dintre planele celor două baze ale unui trunchi de piramidă se numește *înălțimea* trunchiului.

Definiție: Într-un *trunchi de piramidă regulată*, segmentul determinat de mijloacele bazelor unei fețe laterale se numește *apotemă a trunchiului.*

Secțiuni diagonale

Definiție. Secțiunea realizată într-o prismă de un plan determinat de două muchii laterale care nu sunt incluse în aceeași față laterală a prismei se numește *secțiune diagonală* a prismei.

Definiție. Secțiunea realizată într-o piramidă de vârful piramidei și o diagonală a bazei piramidei se numește *secțiune diagonală* a piramidei.

Scanned with OKEN Scanner

Scanned with OKEN Scanner

*

1. Se consideră prisma triunghiulară regulată $ABCA'B'C'$ în care fețele laterale sunt pătrate. Planul α este paralel cu bazele prismei și intersectează muchiile laterale (AA'), (BB') și (CC') în punctele A'', B'' și respectiv C''. Se știe că $AB = 9$ cm și $AA'' = 3$ cm.

a) Calculați raportul înălțimilor prismelor $ABCA''B''C''$ și $A'B'C'A''B''C''$;

b) Calculați raportul dintre aria unei fețe laterale a prismei $ABCA''B''C''$ și aria unei fețe laterale a prismei $A'B'C'A''B''C''$;

c) Calculați raportul dintre suma lungimilor tuturor muchiilor prismei $ABCA''B''C''$ și suma lungimilor tuturor muchiilor prismei $A'B'C'A''B''C''$.

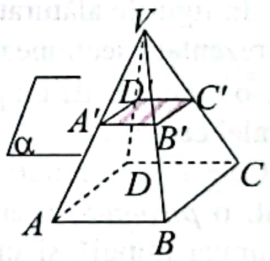
2. Se consideră cubul $ABCDA'B'C'D'$ în care O_1, O_2, O_3 și O_4 sunt centrele fețelor laterale $AA'B'B$, $BB'C'C$, $CC'D'D$, respectiv $DD'A'A$. Se știe că $AB = 8$ cm

a) Calculați AC; *b)* Arătați că $O_1O_2 = \frac{AC}{2}$;

c) Arătați că patrulaterul $O_1O_2O_3O_4$ este pătrat;

d) Calculați aria patrulaterului $O_1O_2O_3O_4$.

3. Piramida patrulateră $VABCD$ din figura alăturată este secționată cu un plan α paralel cu planul bazei, determinând secțiunea $A'B'C'D'$.



a) Justificați că $A'B' \parallel AB$; *b)* Arătați că $\frac{VA'}{VA} = \frac{A'B'}{AB}$;

c) Dacă $AB = 10$ cm, $A'B' = 5$ cm și $AA' = 6$ cm, aflați lungimea muchiei $[VA]$.

4. Planul α, $\alpha \parallel (ABC)$, intersectează muchiile laterale ale tetraedrului $VABC$ în punctele $A' \in VA$, $B' \in VB$ și $C' \in CV$. Demonstrați că:

a) $\frac{VA'}{VA} = \frac{VB'}{VB} = \frac{VC'}{VC} = \frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC} = \frac{B'C'}{BC}$;

b) Triunghiurile $A'B'C'$ și ABC sunt asemenea. Generalizați!

5. Pe muchiile $[AV]$, $[BV]$ și $[CV]$ ale piramidei triunghiulare $VABC$ se consideră punctele D, E și respectiv F astfel încât $\frac{VD}{VA} = \frac{2}{7}$, $\frac{VE}{EB} = \frac{2}{5}$ și $\frac{CF}{FV} = \frac{10}{4}$. Arătați că: *a)* $DE \parallel AB$; *b)* Planele (DEF) și (ABC) sunt paralele.

6. Pe muchia (VA) a piramidei $VABC$ se consideră punctul D astfel încât $\frac{VD}{VA} = \frac{2}{7}$, iar prin D se duce planul paralel cu (ABC) care taie muchiile (VB) și (CV) în punctele E și respectiv F.

a) Demonstrați că triunghiurile ABC și DEF sunt asemenea;

b) Calculați raportul perimetrelor și raportul ariilor triunghiurilor ABC și DEF.

7. Piramida patrulateră regulată $VABCD$ are înălțimea VO.

a) Arătați că $VA = VB = VC = VD$;

b) Prin punctul O', mijlocul înălțimii piramidei, se duce planul α paralel cu planul bazei. Știind că $AB = 30$ cm, calculați aria secțiunii determinate de planul α în piramidă.

**

8. Precizați și justificați valoarea de adevăr a propoziției:

a) Orice piramidă regulată are muchiile laterale congruente;

b) Dacă o piramidă are toate muchiile laterale congruente, atunci piramida este regulată.

9. O piramidă triunghiulară regulată $VABC$ are baza ABC de centru O are $AB = 16$ cm și $VA = 10$ cm. Fie M mijlocul muchiei $[BC]$.

a) Calculați VM;

b) Se consideră planul paralel cu (VBC) și care conține punctul O. Calculați aria secțiunii obținute în piramida $VABC$.

10. Pe înălțimea VO a piramidei regulate $VABCD$ se consideră punctul S. Prin punctul S se duce planul paralel cu planul bazei piramidei care taie muchiile $[VA]$, $[VB]$, $[CV]$ și $[VD]$ în punctele A', B', C' și respectiv D'. Știind că $AB = 10$ cm, $VO = 12$ cm și $VS = 4$ cm, calculați:

a) $A'B'$; *b*) Lungimea apotemei piramidei $VABCD$.

11. Se consideră prisma patrulateră regulată $ABCDA'B'C'D'$ în care $AB = 9$ cm și $BB' = 12$ cm. Pe segmentul $[BC']$ se consideră punctele M și N astfel încât $BM = MN = NC'$. Planele α și β sunt paralele cu bazele prismei, iar $M \in \alpha$ și $N \in \beta$. Calculați:

a) Lungimea segmentului $[BC']$; *b*) $d(\alpha;\beta)$.

12. Se consideră cubul $ABCDA'B'C'D'$. Punctele A'', B'' și C'' sunt situate pe muchiile (AA'), (BB') și respectiv (CC') astfel încât $AA'' = BB'' = CC''$.

a) Arătați că $A''B'' \parallel AB$; *b*) Justificați că $(A''B''C'') \parallel (ABC)$;

c) Dacă $\{D''\} = (A''B''C'') \cap DD'$, arătați că $\frac{AA''}{A'A''} = \frac{DD''}{D'D''}$.

13. Se consideră paralelipipedul dreptunghic $ABCDA'B'C'D'$ în care O_1, O_2, O_3 și O_4 sunt centrele fețelor laterale $AA'B'B$, $BB'C'C$, $CC'D'D$, respectiv $DD'A'A$.

a) Arătați că $O_1O_2 \parallel AC$;

b) Arătați că $(O_1O_2O_3) \parallel (ABC)$;

c) Calculați raportul ariilor patrulaterelor $O_1O_2O_3O_4$ și $ABCD$.

14. Pe muchiile laterale ale paralelipipedului $ABCDA'B'C'D'$ se consideră punctele coplanare M, N, P și Q. Demonstrați că punctele M, N, P și Q sunt vârfurile unui paralelogram.

Scanned with OKEN Scanner

***

15. Se consideră prisma patrulateră regulată $ABCDA'B'C'D'$ cu baza pătratul $ABCD$.
a) Justificați că $C' \in (AA'C)$;
b) Dacă $AB = 18$ cm, iar $\mathcal{A}_{AA'C'C} = \mathcal{A}_{ABCD}$ calculați înălțimea prismei.

16. Secțiunea diagonală $ACC'A'$ a prismei patrulatere regulate $ABCDA'B'C'D'$ este un pătrat cu latura de $6\sqrt{2}$ cm. Calculați:
a) AC'; *b*) AB; *c*) aria unei fețe laterale.

17. Se consideră paralelipipedul dreptunghic $ABCDA'B'C'D'$ în care $AB = 4$ cm, $BC = 5$ cm și $BB' = 20$ cm. Calculați:
a) $\mathcal{A}_{AA'C'C}$; *b*) $\mathcal{A}_{ABC'D'}$; *c*) $\mathcal{A}_{ADC'B'}$.

18. Prisma hexagonală regulată $ABCDEFA'B'C'D'E'F'$ are $AB = AA' = 2$ cm.
a) De terminați numărul de secțiuni diagonale neechivalente ale prismei;
b) Calculați ariile secțiunilor diagonale ale prismei.

19. Un trunchi de piramidă patrulateră regulată are lungimile laturilor bazelor de 12 cm și 8 cm iar apotema trunchiului este de 6 cm. Determinați mărimea înălțimii piramidei din care provine trunchiul.

20. Un trunchi de piramidă patrulateră regulată are aria bazei mici egală cu 100 cm^2 și aria bazei mari 900 cm^2. Se face o secțiune cu un plan paralel cu bazele la aceeași distanță față de ambele baze. Calculați aria secțiunii.

21. Un trunchi de piramidă triunghiulară regulată are înălțimea egală cu 12 cm, apotema bazei mari egală cu 6 cm și apotema bazei mici egală cu 4 cm. Calculați:
a) Înălțimea piramidei din care provine trunchiul;
b) Lungimea apotemei trunchiului de piramidă.

Probleme de șapte stele

22. Se consideră un trunchi de piramidă patrulateră regulată care are lungimea laturii bazei mari egală cu L și lungimea laturii bazei mici egală cu l.
a) Arătați că punctele de intersecție a diagonalelor celor patru fețe laterale ale trunchiului sunt situate într-un plan α;
b) Exprimați aria secțiunii realizate de planul α în trunchiul de piramidă dat.

23. Determinați numărul de secțiuni diagonale ale unei piramide:
a) triunghiulare; *b*) hexagonale.

24. Se consideră o piramidă patrulateră care are toate muchiile congruente. Arătați că secțiunea diagonală a piramidei este un triunghi dreptunghic.

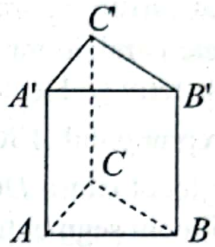
25. Secțiunea diagonală a unei piramide patrulatere regulate este un triunghi echilateral cu latura de lungime l. Exprimați:
a) Lungimea muchiei bazei piramidei; *b*) Lungimea apotemei piramidei.

Scanned with OKEN Scanner

E TESTE DE EVALUARE

Testul 1

1. În figura alăturată este reprezentată o prismă dreaptă în care baza ABC este triunghi echilateral. Fixați punctele M, N și P, mijloacele muchiilor $[AB]$, $[AC]$ și $[A'C']$.



(1p) *a*) Justificați că $(A'B'C') \parallel (ABC)$;

(1p) *b*) Arătați că $NP \parallel (BCC')$;

(1p) *c*) Arătați că $MN \parallel (BCC')$;

(1p) *d*) Arătați că $(MNP) \parallel (BCC')$;

(1p) *e*) Dacă $AB = 6$ cm, calculați $d((MNP);(BCC'))$.

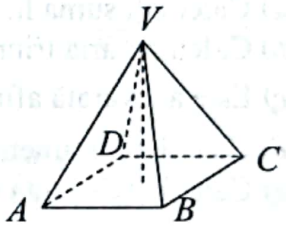
2. În figura alăturată este reprezentată o piramidă cu baza pătratul $ABCD$. Notați cu M, N, și P centrele de greutate ale triunghiurilor VAB, VBC și VCD.

(1p) *a*) Justificați că $MN \parallel AC$;

(1p) *b*) Arătați că $(MNP) \parallel (ABC)$;

(1p) *c*) Calculați $\frac{A_{MNP}}{A_{ABCD}}$;

(1p) *d*) Dacă înălțimea piramidei este $VO = 9$ cm, calculați $d((MNP);(ABC))$.



Notă: Timp de lucru 45 minute. Se acordă 1 punct din oficiu.

Testul 2

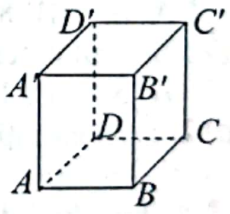
1. În figura alăturată este reprezentat un paralelipiped dreptunghic. Punctele O și O' sunt centrele bazelor $ABCD$, respectiv $A'B'C'D'$.

(1p) *a*) Justificați că $A'C' \parallel (AB'C)$;

(1p) *b*) Justificați că $(A'C'D) \parallel (AB'C)$;

(1p) *c*) Arătați că $O'D \parallel B'O$;

(1p) *d*) Dacă $B'O \cap BD' = \{G\}$, calculați $\frac{B'G}{GO}$;

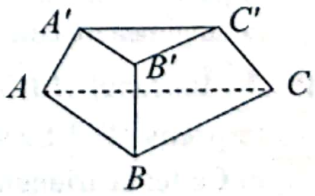


(1p) *e*) Arătați că punctul G este centrul de greutate al triunghiului $AB'C$.

2. În figura alăturată este reprezentat un trunchi de piramidă triunghiulară cu înălțimea $h = 9$ cm, $AB = 6$ cm și $A'B' = 4$ cm.

(2p) *a*) Calculați $\frac{B'C'}{BC}$;

(2p) *b*) Calculați înălțimea piramidei din care provine trunchiul.



Notă: Timp de lucru 45 minute. Se acordă 1 punct din oficiu.

Scanned with OKEN Scanner

Testul 3

(1,5p) 1. Completați cu răspunsurile corecte:

a) Numărul tuturor muchiilor unui paralelipiped dreptunghic este … .

b) Numărul tuturor vârfurilor unei prisme hexagonale este … .

c) Numărul fețelor laterale ale unui trunchi de piramidă triunghiulară este … .

(2p) Prin vârfurile paralelogramului $ABCD$ se construiesc dreptele AA', BB', CC', DD' toate paralele între ele. Un plan intersectează aceste drepte în punctele M, N, P respectiv Q. Demonstrați că $MNPQ$ este paralelogram.

(3p) Dreptunghiul $ABCD$ de centru O are $AB = 4$ cm, $BC = 4\sqrt{3}$ cm și notăm cu F mijlocul laturii DC. În vârful B se ridică $BN \perp (ABC)$ cu $BN = 6$ cm. Notăm cu E mijlocul segmentului $[DN]$.

a) Arătați că $EO \perp (ABC)$;

b) Demonstrați că $(EOF) \parallel (BCN)$.

c) Calculați lungimea DN.

(2,5p) Fie piramida patrulateră regulată $VABCD$ cu $AB = 20$ cm și $VA = 26$ cm. Notăm cu M, N și P mijloacele muchiilor AB, VB respectiv BC.

a) Calculați suma lungimilor tuturor muchiilor piramidei.

b) Calculați aria triunghiului VAB.

c) Este adevărată afirmația „$(VAC) \parallel (MNP)$” ? Justificați.

d) Calculați perimetrul triunghiului MNP.

e) Calculați distanța de la vârful C la muchia VA.

Testul 4

(1,5p) 1. Încercuiți singurul răspuns corect:

a) Numărul tuturor vârfurilor unui trunchi de piramidă patrulateră este:

A) 4; B) 6; C) 8; D) 12; E) 10.

b) Numărul tuturor fețelor la o prismă hexagonală este:

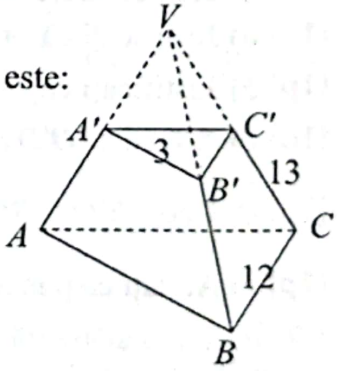
A) 6; B) 8; C) 10; D) 12; E) 18.

c) Numărul muchiilor laterale ale unei prisme pentagonale este:

A) 5; B) 10; C) 15; D) 6; E) 12.

(1,5p) 2. Demonstrați că toate diagonalele unui paralelipiped sunt concurente într-un punct.

(3p) 3. În trunchiul de piramidă triunghiulară regulată $ABCA'B'C'$ se cunosc: $AB = 12$ cm, $A'B' = 3$ cm și $AA' = 13$ cm. Calculați:



a) perimetrul bazei mari; *b)* aria bazei mici;

c) lungimea muchiei VA unde V este vârful piramidei din care provine trunchiul.

(3p) 4. În cubul $ABCDA'B'C'D'$ punctele M și N sunt mijloacele muchiilor AD respectiv $D'C'$. Se știe că $MN = 3\sqrt{6}$ m.

a) Ce fel de triunghi este $MD'N$? Justificați răspunsul.

c) Dacă $AB = 6$ cm calculați distanța de la vârful A' la dreapta $A'C$.

d) Dacă $AB = 6$ cm calculați distanța de la vârful A' la planul (BDD').

Scanned with OKEN Scanner

Fişă pentru portofoliul individual

Numele şi prenumele: _____

Clasa a VIII-a ____ **G4**

Tema nr. II.4: Poziţiile relative a două şi trei plane. Plane paralele. Teoreme de paralelism. Secţiuni paralele cu baza în corpurile studiate. Trunchiul de piramidă

(2p) 1. Completaţi spaţiile punctate astfel încât să obţineţi afirmaţii adevărate:

m) Două plane care au o dreaptă comună se numesc plane.....

n) Două plane care nu au niciun punct comun se numesc plane.....

o) Distanţa dintre planele celor două baze ale unei prisme se numeşte..... prismei.

p) Segmentul determinat de mijloacele bazelor unui trunchi de piramidă regulată se numeşte.....trunchiului.

(2p) 2. Pentru fiecare dintre enunţurile următoare, dacă enunţul este adevărat, încercuiţi litera „A", în caz contrar încercuiţi litera „F":

a)	Dacă două plane sunt paralele, atunci orice dreaptă conţinută într-unul dintre plane este paralelă cu celălalt plan.	**A**	**F**
b)	Dacă două plane diferite sunt perpendiculare pe aceeaşi dreaptă, atunci cele două plane sunt paralele între ele.	**A**	**F**
c)	O prismă dreaptă care are baza un poligon regulat se numeşte tetraedru regulat.	**A**	**F**
d)	Lungimea muchiei laterale a unei prisme drepte este egală cu lungimea înălţimii prismei.	**A**	**F**

La următoarele subiecte scrieţi pe fişa de evaluare rezolvările complete.

(2p) 3. Se consideră paralelogramele $ABCD$ şi $CDEF$ situate în plane diferite. Arătaţi că: *a)* $AB \parallel (CDE)$; *b)* $(ADE) \parallel (BFC)$.

Scanned with OKEN Scanner

(3p) 4. Desenați o piramidă patrulateră regulată $VABCD$. Fie M, N, P și Q mijloacele muchiilor (VA), (VB), (VC), respectiv (VD).

a) Arătați că $MP \parallel AC$;

b) Arătați că $(MNP) \parallel (ABC)$;

c) Calculați valoarea raportului $\frac{A_{MNPQ}}{A_{ABCD}}$;

d) Dacă G_1 este centrul de greutate al ΔVAB și G_2 este centrul de greutate al ΔVBC, arătați că $G_1G_2 \parallel AC$.

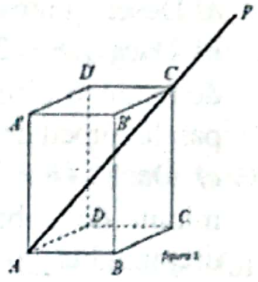
NOTĂ: Timp de lucru 50 minute. Se acordă un punct din oficiu.

Scanned with OKEN Scanner

2.10. Probleme cu caracter aplicativ

1. Un vas de forma unui paralelipiped dreptunghic cu dimensiunile bazei de 15 dm şi 30 dm are înălţimea de 6 dm. Ştiind că pe toată suprafaţa, în interior, se pun plăci de faianţă în formă de pătrat cu latura de 15 cm, determinaţi numărul de plăci necesare.

2. Prisma patrulateră dreaptă $ABCDA'B'C'D'$ cu bazele pătrate (*figura 1*), reprezintă schematic un suport pentru umbrele. Segmentul $[AP]$ reprezintă o umbrelă care se sprijină în punctul C'. Se ştie că $AB = 30$ cm, $AC = CC'$ şi $AP = 90$ cm.



a) Calculaţi înălţimea suportului.
b) Aflaţi CP' şi tangenta unghiului dreptelelor AP şi DC'.
c) Arătaţi că DD' este paralelă cu planul $(A'AP)$.

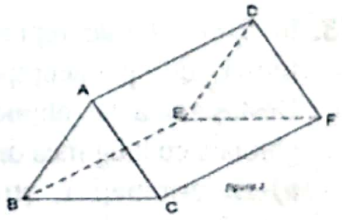
3. Un cub pictat în roşu a fost tăiat în 27 de cubuleţe identice.
a) Câte cuburi sunt pictate pe o singură faţă?
b) Câte cuburi sunt pictate pe două feţe?
c) Câte cuburi sunt pictate pe trei feţe?

4. Fie cubul $ABCDEFGH$ cu latura de 6 cm. Trei furnici se află în punctul A şi vor să ajungă în punctul C, unde sunt firimituri de pâine. O furnică a pornit pe *traseul* $AEHGC$, a doua furnică pe *traseul* AHC, iar a treia furnică pe *traseul* $AHGC$. Presupunând că cele trei furnici au mers cu aceeaşi viteză, aflaţi care furnică ajunge prima şi care furnică ajunge a doua?

5. Dintr-o singură bucată de sârmă, Radu vrea să construiască un cub cu muchia de 3 cm. Nu are voie să taie sârma în bucăţi, dar are voie să treacă de mai multe ori peste aceeaşi muchie. Determinaţi lungimea minimă a sârmei.

6. O insectă mănâncă un cub de lemn $ABCDA'B'C'D'$ cu muchia de 10 cm începând din vârful A. Primul segment parcurs este o treime din segmentul $[AM]$, unde M este mijlocul muchiei $[C'D']$. Următorul segment este paralel cu planul (ABC) şi are capătul N pe muchia CC', iar ultimul segment are capătul în A'. Într-un centimetru parcurs insecta mănâncă 0,5 grame de lemn. Ce cantitate de lemn mănâncă în total(cu aproximaţie la sutime)?

7. În *figura 2* este reprezentat schematic un cort din pânză. Cortul este o prismă dreaptă cu baza un triunghi echilateral, de înălţime 2 m şi latura bazei de 18 dm.



a) Determinaţi câţi metri pătraţi de pânză sunt necesari pentru confecţionarea cortului? (toate feţele tului sunt din pânză, inclusiv podeaua)
b) Determinaţi măsura unghiului dintre dreptele AC şi DE.

8. O încăpere are forma unui cub $ABCDA'B'C'D'$ cu latura de 10 m. Fie M, N, M', N' mijlocele laturilor $[AB]$, $[AD]$, $[C'D']$ şi $[B'C']$.
a) Arătaţi că punctele M, N, M', N' sunt coplanare.
b) Dacă proprietarul încăperii doreşte să vopsească triunghiurile AMN şi $C'N'M'$

Scanned with OKEN Scanner

cu alb şi restul pereţilor (inclusiv podeaua şi tavanul) cu albastru, câtă vopsea trebuie să cumpere ştiind că foloseşte 1 kg de vopsea la 10 m^2? Dacă 1 kg de vopsea albă costă 20 de lei, iar 1 kg de vopsea albastră costă 24 de lei, determinaţi suma de bani necesară achiziţionării vopselelor.

9. Desenul alăturat, *figura 3*, reprezintă două feţe din desfăşurarea unui paralelipiped dreptunghic.

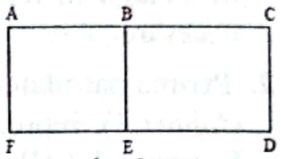


figura 3

a) Desenaţi întreaga desfăşurare.

b) Dacă $AF = 20$ cm, $AB = 40$ cm şi $BC = 80$ cm, atunci determinaţi câte cuburi cu muchia de 20 cm intră în acest paralelipiped dreptunghic.

c) Dacă $AF = 12$ cm, $AB = 18$ cm şi $BC = 30$ cm, atunci determinaţi numărul minim de cuburi de aceeşi muchie care ocupă tot spaţiul paralelipipedului dreptunghic.

10. O miniseră are forma unui cub $ABCDA'B'C'D'$ cu latura de 20 m. La intersecţia diagonalelor $[AC']$ şi $[A'C]$ se fixează o sursă de lumină legată prin cabluri de cele patru colţuri ale tavanului.

a) Determinaţi lungimea totală a cablurilor folosite.

b) Arătaţi că dacă în seră sunt lăsaţi să zboare 28 de fluturi, atunci există cel puţin doi fluturi la o distanţă mai mică de 12 m unul de altul.

11. Acoperişul unei case, de forma unui paralelipiped dreptunghic $ABCDA'B'C'D'$, are forma unei prisme drepte cu baza triunghi echilateral $A'B'MD'C'N$. Dacă $AB = 8$ m, $BC = 5$ m şi $BB' = 3{,}5$ m, atunci:

a) Cât costă ţigla necesară pentru acoperişul casei dacă 1 m^2 de ţiglă costă 4 lei?

b) Pereţii exteriori sunt pulverizaţi cu o substanţă pentru a fi protejaţi împotriva umezelii. Dacă un flacon conţine 130 ml de substanţă, să se calculeze de câte flacoane este nevoie pentru a acoperi pereţii, ştiind că o cantitate de 60 ml acoperă o suprafaţă de 7 m^2?

c) În jurul casei se construieşte o alee asfaltată cu lăţimea de 50 cm. Pe părţile laterale ale aleii se pun mici felinare, din 3 în 3 metri. Câte felinare sunt necesare pentru a ilumina casa?

12. Se poate introduce integral un creion ascuţit la ambele capete, având lungimea de 10 cm, într-o cutie în formă de cub cu muchia de 6 cm?

13. În *figura 4* este reprezentată desfăşurarea unei cutii în formă de paralelipiped dreptunghic $ABCDA'B'C'D'$. Desfăşurarea se obţine dintr-o foaie de tablă dreptunghiulară cu lungimea de 80 cm şi lăţimea de 70 cm.

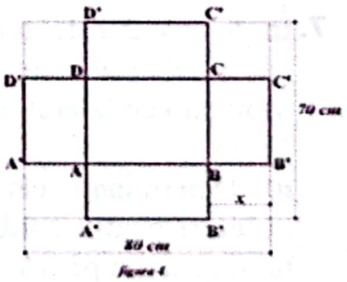


figura 4

a) Determinaţi x, ştiind că aria suprafeţei decupate este de 64 cm^2.

b) Pentru $x = 30$ cm determinaţi lungimea celui mai scurt drum parcurs de ofurnică pe suprafaţa laterală a paralelipipedului dreptunghic din A în C'.

c) Să se demonstreze că după decuparea părţii necesare pentru confecţionarea cutiei, se pierde mai puţin de 30% din suprafaţa tablei, pentru $x = 20$ cm.

14. Câte cuburi cu latura de 0,6 m încap într-o cutie de formă paralelipiped dreptunghic cu dimensiunile 0,18 dam, 240 cm şi 6 dm?

Scanned with OKEN Scanner

15. Pentru a construi o cutie de formă paralelipiped dreptunghic muchiile trebuie capsate din 5 cm în 5 cm, inclusiv în cele 8 colțuri. Dacă dimensiunile paralelipipedului sunt 4 dm, 5 dm și 8 dm, atunci determinați numărul de capse necesare construirii cutiei.

16. Pentru vopsirea unui cub sunt necesare 3 kg de vopsea. Dacă, după ce a fost vopsit, cubul s-a tăiat în cubulețe cu latura de 2 ori mai mică, de câte kg de vopsea mai avem nevoie pentru a vopsi și părțile neacoperite încă de vopsea?

17. Pentru pavarea unei străzi se folosesc pietre paralelipipedice cu lungimea de 10 cm, lățimea de 8 cm și înălțimea de 6 cm.
a) Ce suprafață se poate pietrui cu 100000 de pietre?
b) Dacă strada are lățimea de 6 m, de câte pietre este nevoie pentru pavarea unui km de stradă?

18. Interiorul unui cub $ABCDA'B'C'D'$ este format din oglinzi perfecte. Prin vârful B pătrunde în interior o rază de lumină, se reflectă pe fața (DCC') și ajunge în vârful A'. Se știe că muchia cubului are lungimea de 4 cm.
a) Determinați lungimea drumului parcurs de rază de la B la A'.
b) Dacă M este punctul în care raza de lumină atinge fața (DCC'), calculați aria triunghiului BMA'.

19. O cameră are forma unui cub $ABCDA'B'C'D'$ cu lungimea muchiei de 4 m. Punctul P reprezintă un păianjen situat pe peretele $ABB'A'$ la distanța de 1 m față de muchiile AB și BB', iar punctul M reprezintă o muscă situată pe peretele $CDD'C'$ la distanța de 1 m față de muchiile DD' și $D'C'$.
a) Arătați că punctele P, B', M și D sunt situate în același plan.
b) Calculați lungimea drumului celui mai scurt pe care trebuie să meargă păianjenul pentru a ajunge la muscă (se consideră că păianjenul se poate deplasa doar pe podea, pe pereți și pe tavan).
c) Determinați distanța de la muscă la muchia BB'.

20. O cameră frigorifică în formă de paralelipiped dreptunghic este plină cu pachete cubice, fiecare având latura de 4 dm, fără să rămână goluri între ele. Podeaua camerei frigorifice este acoperită complet de 7 pachete. Înălțimea camerei este de 5 ori mai mare decât înălțimea unui pachet.
a) Determinați aria suprafeței podelei încăperii.
b) Un perete lateral al camerei se vopsește. Dacă pentru 1 dm^2 se folosesc 100 ml de vopsea, iar 1 l de vopsea specială costă 16 lei, determinați prețul vopselei.

21. La un concurs, un alpinist trebuie să escaladeze un bloc de piatră în formă de prismă dreaptă cu baza pătrat, $ABCDA'B'C'D'$, $AB = 4$ m, $BC = 5$ m și $AA' = 3$ m.
a) Alpinistul trebuie să ajungă din A în A', traversând fiecare față laterală a blocului. Care este lungimea minimă a traseului?
b) Dacă traseul alpinistului întâlnește muchiile $[BB']$ și $[CC']$ în punctele P și Q, determinați lungimea segmentului $[PQ]$.

Scanned with OKEN Scanner

2.11. Probleme pentru performanță școlară și olimpiade

1. Se consideră trei semidrepte Ox, Oy, Oz pe care se iau punctele A, B, C astfel ca $OA = x$, $OB = 2x$, $OC = 3x$ (x este un număr oarecare). Aflați locul geometric al proiecției punctului O pe planul (ABC).

2. Într-un plan α se află un cerc de centru O și raza $OA = 6$ cm. Pe cerc se iau punctele B și C, astfel ca $[AB] \equiv [AC]$ și $BC = 6\sqrt{3}$ cm. Segmentul $[OV]$ este perpendicular pe planul α și $AV = BV = CV = 12$ cm. Se notează cu D proiecția lui A pe VB. Aflați aria triunghiului ACD.

3. Se consideră cubul $ABCDA'B'C'D'$ în care $AD' \cap A'D = \{O\}$ și punctul M este mijlocul muchiei AB. Demonstrați că:

a) $MO \parallel (DBB')$; *b)* $MO \perp (A'C'D)$.

4. Fie paralelogramul $ABCD$. Se construiesc dreptele paralele AM și CN, astfel încât punctele M și N sunt în același semiplan determinat de (ABC) și $AM = \frac{1}{4}CN$.

a) Arătați că planele (NAB) și (CDM) nu sunt paralele.

b) Dacă $(ABN) \cap (CDM) = d$, $BN \cap d = \{P\}$, $MD \cap d = \{Q\}$ și $AB = 20$ cm, calculați PQ.

5. Pe planul pătratului $ABCD$, cu $AB = 3$ cm, de aceeași parte a planului, se construiesc perpendicularele $B'B = 6$ cm, $CC' = 8$ cm și $D'D = 4$ cm. Determinați punctul A', aflat pe perpendiculara în A pe planul pătratului, astfel încât A', B', C' și D' să fie coplanare.

6. Se consideră piramida patrulateră regulată $VABCD$ cu baza $ABCD$ și un plan α, $\alpha \in (ABC)$ care intersectează segmentele (VA), (VB), (VC) și (VD) în punctele M, N, P și respectiv Q. Arătați că: $\frac{MA}{MV} + \frac{PC}{PV} = \frac{NB}{NV} + \frac{QD}{QV}$.

7. Pe planul dreptunghiului $ABCD$ ($AB > BC$) se ridică perpendiculara SA. Dacă E este mijlocul segmentului $[SC]$ se cere:

a) Demonstrați ca triunghiul DEB este isoscel.

b) Arătați ca $BD < SC$.

c) Dacă M este mijlocul lui $[BE]$, $SM \cap BC = \{N\}$, iar $BD \cap AN = \{P\}$, arătați că $MP \parallel (SAD)$.

8. Se consideră A, B, C trei puncte pe un cerc de rază r astfel încât triunghiul ABC este echilateral. Pe planul cercului se ridică perpendicularele AM, BN, CP, în același semispațiu delimitat de planul (ABC), astfel încât $AM = 4a$, $BN = CP = a$, unde $a > 0$. Arătați că dreapta de intersecție dintre planele (ABC) și (MNP) este tangentă la cerc.

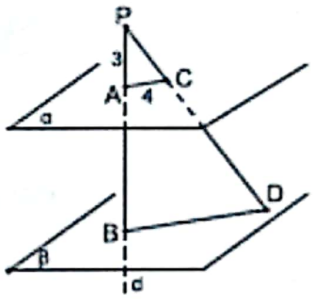
Scanned with OKEN Scanner

9. Se consideră punctele necoplanare A, B, C şi D. Fie $E \in CD$ astfel încât suma $AE + EB$ să fie minimă şi F intersecţia bisectoarei unghiului AEB cu dreapta AB. Arătaţi că $EF \perp CD$.

10. Un paralelipiped dreptunghic $ABCDA'B'C'D'$ are baza $ABCD$ pătrat, iar M şi N sunt picioarele perpendicularelor duse din A şi D pe diagonala BD'. Să se demonstreze că $MDNB'$ este paralelogram dacă şi numai dacă $ABCDA'B'C'D'$ este cub.

11. Fie paralelipipedul dreptunghic $ABCDMNPQ$ şi punctele $E \in (BN)$, $F \in (DQ)$ astfel încât suma $AE+AF+PE+PF$ este minimă. Arătaţi că $EF \perp AP$ dacă şi numai dacă $ABCDMNPQ$ este prismă regulată.

12. În figura alăturată $d \perp \alpha$, $\alpha \parallel \beta$, $AP = 3$ cm şi $AB = 6$ cm. Prin punctul P trece o dreaptă care înţeapă planul α în C şi planul β în D, astfel încât $AC = 4$ cm. Calculaţi perimetrul ΔPBD.



Scanned with OKEN Scanner

CAPITOLUL

Proiecţii ortogonale 3

3.1. Proiecţii de puncte, segmente şi drepte pe un plan
3.2. Unghiul unei drepte cu un plan.
Lungimea proiecţiei unui segment
3.3. Teorema celor trei perpendiculare
Teste de evaluare
3.4. Unghi diedru. Plane perpendiculare
3.5. Calculul unor distanţe şi măsuri de unghiuri pe feţele sau în interiorul corpurilor studiate
Teste de evaluare
3.6. Probleme cu caracter aplicativ
3.7. Probleme pentru performanţă şcolară şi olimpiade

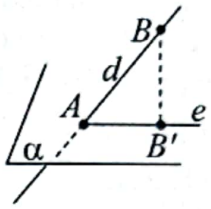
Scanned with OKEN Scanner

CAPITOLUL 3

Proiecţii ortogonale

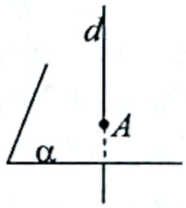
3.1. Proiecţii de puncte, segmente şi drepte pe un plan

Proiecţia unui punct. Dacă punctul B este exterior planului α, atunci proiecţia punctului B pe planul α este piciorul perpendicularei duse din punctul B pe planul α.



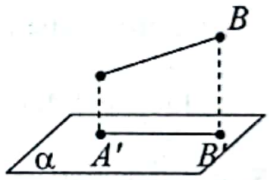
Dacă $\begin{cases} B \notin \alpha \\ BB' \perp \alpha \\ B' \in \alpha \end{cases}$, atunci notăm $B' = \text{pr}_\alpha B$.

Observaţie. Dacă punctul A aparţine planului α, atunci proiecţia punctului A pe planul α coincide cu punctul A: dacă $A \in \alpha$, atunci $A = \text{pr}_\alpha A$.

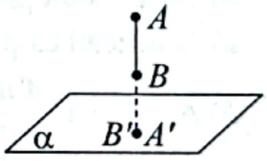


Proiecţia unui segment: Proiecţia segmentului $[AB]$ pe planul α este segmentul $[A'B']$ ale cărui extremităţi sunt proiecţiile pe planul α ale extremităţilor segmentului dat.

Notăm: $\text{pr}_\alpha[AB] = [\text{pr}_\alpha A \ \text{pr}_\alpha B] = [A'B']$.

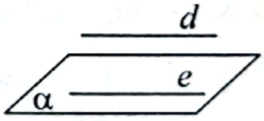


Observaţie: Dacă dreapta AB este perpendiculară pe planul α, atunci proiecţia segmentului $[AB]$ pe planul α se reduce la un punct.



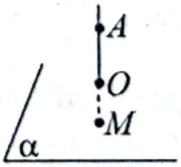
Proiecţia unei drepte. Proiecţia unei drepte d pe planul α este dreapta determinată de proiecţiile pe planul α a două puncte diferite ale dreptei d.

Notăm: $e = \text{pr}_\alpha d$.



Observaţie. Dacă dreapta d este perpendiculară pe planul α atunci proiecţia dreptei d pe planul α este un punct.

Dacă $AO \perp \alpha$ şi $AO \cap \alpha = \{M\}$, atunci $\{M\} = \text{pr}_\alpha AO$.



Definiţie. În general, proiecţia figurii geometrice plane F pe planul α este figura geometrică F' formată din reuniunea proiecţiilor punctelor figurii F pe planul α.

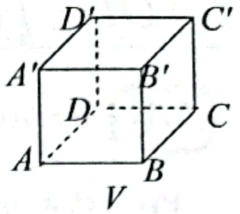
Scanned with OKEN Scanner

Scanned with OKEN Scanner

✻

1. Fie cubul $ABCDA'B'C'D'$ (vezi figura). Numiți:

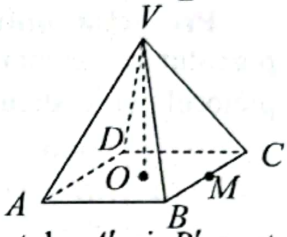
a) $\text{pr}_{(ABC)}A'$; *b*) $\text{pr}_{(BCC')}A$; *c*) $\text{pr}_{(ABC)}D$;
d) $\text{pr}_{(ABC)}A'C'$; *e*) $\text{pr}_{(DCC')}AB'$; *f*) $\text{pr}_{(ABC)}AC'$;
g) $\text{pr}_{(ADD')}AB'$; *h*) $\text{pr}_{(ABC)}\Delta A'D'C'$; *i*) $\text{pr}_{(ABC)}A'B'C'D'$.



2. În figura alăturată, $VABCD$ este o piramidă patrulateră regulată în care O este proiecția ortogonală a vârfului V pe planul bazei. Precizați:

a) $\text{pr}_{(ABC)}[VA]$; *b*) $\text{pr}_{(ABC)}[VM]$, unde $M \in (BC)$;

c) Haşurați $\text{pr}_{(ABC)}\Delta VAB$ şi $\text{pr}_{(ABC)}\Delta VMC$.



3. Punctele A şi B sunt de aceeaşi parte a planului α, iar punctele A' şi B' sunt proiecțiile punctelor A şi B pe planul α. Justificați că:

a) Dacă $AB \parallel \alpha$, atunci $A'B' \parallel AB$; *b*) Arătați că $A'B' \leq AB$;

c) Dacă $AB \cap \alpha = \{O\}$, atunci punctele A, B şi O sunt coliniare.

4. Punctele A şi B sunt de o parte şi de alta a planului α, iar punctele A' şi B' sunt proiecțiile punctelor A şi B pe planul α. Dacă $AB \cap \alpha = \{O\}$, arătați că:

a) Punctele A, O şi B sunt coliniare; *b*) $\dfrac{AA'}{BB'} = \dfrac{OA'}{OB'} = \dfrac{OA}{OB}$.

5. Punctele coliniare A, B şi C sunt de aceeaşi parte a planului α, iar punctele A', B' şi C' sunt proiecțiile punctelor A, B şi respectiv C pe planul α.

a) Justificați că punctele A', B' şi C' sunt coliniare;

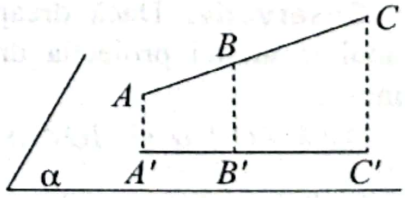
b) Arătați că $\dfrac{A'B'}{B'C'} = \dfrac{AB}{BC}$; *c*) Dacă $AB = 4$ cm, $AC = 10$ cm şi $B'C' = 3$ cm, calculați $A'B'$.

6. Segmentul AC se proiectează pe planul α după segmentul $A'C'$ (vezi figura alăturată). Se ştie că $B \in [AC]$ astfel încât $\dfrac{AB}{AC} = \dfrac{4}{7}$, $B' = \text{pr}_{\alpha}B$ şi $A'B' = 2$ cm.

a) Calculați $A'C'$;

b) Dacă $\dfrac{AC}{A'C'} = 2$, determinați $m\left(\widehat{AB; A'B'}\right)$.

7. Trapezul $ABCD$ are numai baza mare AB conținută în planul α, iar $AB = 2 \cdot DC$. Distanța de la punctul C la planul α este de 36 cm. Notăm $\{O\} = AC \cap BD$ şi $O' = \text{pr}_{\alpha}O$.



a) Determinați valoarea raportului $\dfrac{CO}{CA}$; *b*) Calculați OO'.

8. Triunghiul ABC se proiectează pe planul α după triunghiul $A'B'C'$. Fie M

mijlocul segmentului $[BC]$ şi G centrul de greutate al triunghiului ABC. Punctele M' şi G' sunt proiecţiile punctelor M şi respectiv G pe planul α. Arătaţi că:

a) Punctul M' este mijlocul segmentului $[B'C']$;

b) Punctul G' este centrul de greutate al triunghiului $A'B'C'$;

c) $\mathcal{P}_{A'B'C'} \leq \mathcal{P}_{ABC}$.

**

9. Patrulaterul $A'B'C'D'$ este proiecţia pe planul α a paralelogramului $ABCD$. Fie $\{O\} = AC \cap BD$ şi O' mijlocul segmentului $[A'C']$. Arătaţi că:

a) $O' = \text{pr}_{\alpha} O$; *b*) Patrulaterul $A'B'C'D'$ este paralelogram.

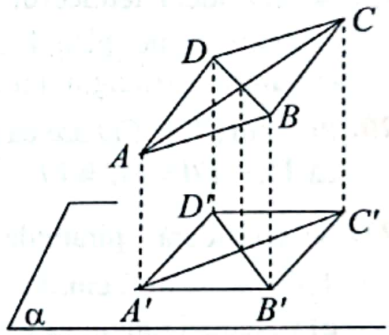
10. Unghiul drept AOB are latura $[OA$ paralelă cu planul α. Punctele A, O şi B se proiectează pe planul α în punctele A', O' şi respectiv B'. Arătaţi că:

a) $A'O' \perp OB$; *b*) $m(\widehat{A'O'B'}) = 90°$.

11. În figura alăturată $ABCD$ este pătrat, iar $A'B'C'D'$ este proiecţia lui pe planul α. Arătaţi că:

a) Dacă $BC \parallel \alpha$, atunci patrulaterul $A'B'C'D'$ este dreptunghi;

b) Dacă $BD \parallel \alpha$, atunci patrulaterul $A'B'C'D'$ este romb.



12. Fie pătratul $ABCD$. În vârfurile C şi D se ridică perpendicularele CM respectiv DN pe planul pătratului. Arătaţi că proiecţiile mijloacelor segmentelor $[AM]$ şi $[BN]$ pe planul (ABC) coincid.

13. Unghiul AOB are latura $[OA$ paralelă cu planul α. Punctele A, O şi B se proiectează pe planul α în punctele A', O' şi respectiv B'.

a) Dacă $[OB \parallel \alpha$, arătaţi că $\widehat{A'O'B'} \equiv \widehat{AOB}$.

b) Dacă $[OB$, α, comparaţi măsurile unghiurilor AOB şi $A'O'B'$ în cazurile:

i) Unghiul AOB este obtuz; *ii*) Unghiul AOB este ascuţit.

14. Triunghiul ABC este dreptunghic în B, are cateta $[AB]$ inclusă în planul α, iar $C \notin \alpha$. Fie C' proiecţia punctului C pe planul α, $C' \notin AB$.

Se ştie că $AB = 3$ cm, $BC = 4$ cm şi $BC' = a$ cm. Arătaţi că:

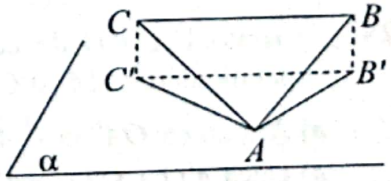
a) triunghiul ABC' este dreptunghic; *b*) $a < 4$;

c) $m(\widehat{ACB}) < m(\widehat{AC'B})$; *d*) $m(\widehat{BAC}) > m(\widehat{BAC'})$.

15. Triunghiul isoscel ABC cu $AB = AC$ are vârful A situat în planul α. Dreapta BC este paralelă cu α. Dacă $\text{pr}_{\alpha} C = C'$ şi $\text{pr}_{\alpha} B = B'$, demonstraţi că:

a) Triunghiul $AB'C'$ este isoscel;

b) $m(\sphericalangle B'AC') > m(\sphericalangle BAC)$.



Scanned with OKEN Scanner

Scanned with OKEN Scanner

***

16. Triunghiul isoscel ABC are baza $[BC]$ inclusă în planul α, iar punctul A' este proiecția punctului A pe planul α, $A' \notin BC$. Demonstrați că:

a) Triunghiul $A'BC$ este isoscel; *b)* $m(\widehat{BA'C}) > m(\widehat{BAC})$.

17. Triunghiul isoscel ABC are latura BC inclusă în planul α, iar proiecția lui A pe planul α este punctul M. Se știe că $m(\widehat{BMC}) = 90°$, $BM = 24$ cm și $MC = 10$ cm. Calculați perimetrul triunghiului ABC.

18. Pe cercul de centru O și rază $R = 10$ cm se consideră punctele A, B, C. Punctul M se proiectează pe planul cercului în punctul O. Se știe că $OM = 24$ cm.

a) Arătați că $MA = MB = MC$. *b)* Calculați $\cos(\widehat{MAO})$.

19. Se consideră tetraedrul $ABCD$ în care $AB = AC = AD$, iar A' este proiecția vârfului A pe planul (BCD). Arătați că punctul A' este centrul cercului circumscris triunghiului BCD.

20. Piramida $VABCD$ are ca bază patrulaterul inscriptibil $ABCD$ cu centrul O. Știind că $VA = VB = VC = VD$, arătați că $O = \text{pr}_{(ABC)}V$.

21. Se consideră piramida patrulateră regulată $VABCD$ cu baza $ABCD$ în care $VA = AC = 6\sqrt{2}$ cm.

a) Calculați lungimea proiecției muchiei VA pe planul bazei;
b) Determinați măsura unghiului format de dreptele VA și AC;
c) Calculați lungimea proiecției muchiei VA pe planul (VBD).

Probleme de șapte stele

22. Piramida patrulateră regulată $VABCD$ are apotema $[VM]$, $M \in BC$. Punctul O este centrul bazei piramidei. Dacă $VM = AB = 12$cm, calculați:

a) înălțimea piramidei;
b) aria secțiunii diagonale;
c) suma lungimilor proiecțiilor tuturor muchiilor pe planul bazei.

23. Triunghiul echilateral ABC este inclus în planul α și este proiecția triunghiului DBC pe planul α. Fie E mijlocul segmentului $[BC]$. Se știe că $AB = 12$ cm și $AD = 8$ cm.

a) Arătați că $BC \perp (DEA)$; *b)* Aflați $d(D; BC)$;

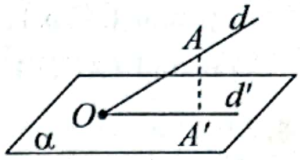
c) Aflați aria triunghiului DBC; *d)* Arătați că $\frac{\mathcal{A}_{ABC}}{\mathcal{A}_{DBC}} = \cos(\widehat{DEA})$.

24. Fie rombul $ABCD$ de centru O și $AC = 8$ cm. În punctele A și C se ridică perpendicularele AA' și CC' pe planul (ABC), de aceeași parte a planului.

a) Arătați că $OA' \cdot \cos(\widehat{AOA'}) = OC' \cdot \cos(\widehat{COC'})$;
b) Dacă $A'O \perp C'O$, $AA' = 7$cm și $CC' = x$, calculați x.

3.2. Unghiul unei drepte cu un plan. Lungimea proiecției unui segment

Unghiul unei drepte cu un plan. Unghiul dreptei d cu planul α este unghiul format de dreapta d cu proiecția ei pe planul α.



Dacă $d' = \text{pr}_\alpha d$, atunci $m(\widehat{d;\alpha}) = m(\widehat{d;d'})$.

Observații. 1. Dacă $d \subset \alpha$ sau $d \parallel \alpha$, atunci $m(\widehat{d;\alpha}) = 0°$.

2. Dacă $d \perp \alpha$, atunci $m(\widehat{d;\alpha}) = 90°$.

Lungimea proiecției unui segment pe o dreaptă

Se consideră un segment $[AB]$ și o dreaptă d. Dacă $[A'B'] = \text{pr}_d[AB]$, atunci

$$A'B' = AB \cdot \cos(\widehat{AB;d}).$$

Observație. Dacă $AB \parallel d$, atunci $A'B' = AB$, iar dacă $AB \perp d$, atunci $A'B' = 0$.

Lungimea proiecției unui segment pe un plan

Se consideră un segment $[AB]$ și un plan α. Dacă $[A'B'] = \text{pr}_\alpha[AB]$, atunci

$$A'B' = AB \cdot \cos(\widehat{AB;\alpha}).$$

Observație. Dacă $AB \parallel \alpha$, atunci $A'B' = AB$, iar dacă $AB \perp \alpha$, atunci $A'B' = 0$.

---

*

1. Un segment $AB = 10$ cm se proiectează pe planul α după segmentul $[A'B']$. Calculați $A'B'$ dacă:

a) $m(\widehat{AB;\alpha}) = 60°$; *b)* $m(\widehat{AB;\alpha}) = 45°$; *c)* $m(\widehat{AB;\alpha}) = 30°$.

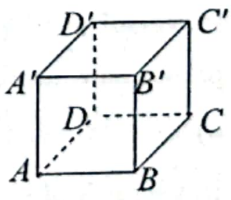
2. Precizați poziția dreptei AB în raport cu planul α dacă:

a) $m(\widehat{AB;\alpha}) = 0°$; *b)* $m(\widehat{AB;\alpha}) = 90°$.

3. Reprezentați un plan α și o dreaptă d perpendiculară pe α în punctul O. Pe dreapta d se consideră punctul A astfel încât $OA = 3$ cm iar în planul α se consideră un punct B. Determinați $m(\widehat{AB,\alpha})$ dacă:

a) $AB = 3\sqrt{2}$; *b)* $AB = 6$; *c)* $AB = \sqrt{12}$.

4. Desenați cubul din figura alăturată și determinați:



a) $m(\widehat{A'B';(ABC)})$; *b)* $m(\widehat{BB';(ABC)})$;

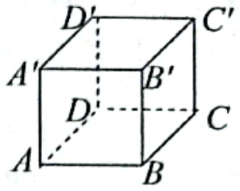
c) $m(\widehat{B'C;(ABC)})$; *d)* $\cos(\widehat{A'C;(ABC)})$.

Scanned with OKEN Scanner

5. Cubul din figura alăturată are $AB = a$. Exprimați lungimea proiecției segmentului $[A'B']$ pe:

a) planul (ABB'); *b*) planul (ACC');

c) planul (ADD'); *d*) planul $(AB'D')$.



6. Muchia laterală $[AA']$ a trunchiului de piramidă patrulateră regulată $ABCDA'B'C'D'$ formează cu planul bazei mari un unghi cu măsura de 45°.

a) Arătați că $AA' \perp CC'$;

b) Dacă $AA' = 8\sqrt{2}$ cm, calculați înălțimea trunchiului de piramidă.

7. Desenați un cub $ABCDA'B'C'D'$. Dacă $AB = l$, exprimați lungimea segmentului care reprezintă proiecția segmentului $[BB']$ pe:

a) dreapta AB; *b*) dreapta CC'; *c*) dreapta $A'C'$; *d*) dreapta BC'.

8. Notăm cu O centrul bazei $ABCD$ a prismei patrulatere regulate $ABCDA'B'C'D'$. Se cunosc $AB = 14$ cm și $CC' = 7\sqrt{2}$ cm.

a) Calculați măsura unghiului format de dreapta OC' cu planul bazei;

b) Demonstrați că triunghiul $A'OC'$ este dreptunghic;

c) Calculați lungimea proiecției segmentului $[AA']$ pe dreapta $A'O$.

**

9. Desenați un tetraedru regulat $ABCD$ în care $AB = a$.

a) Puneți în evidență în desen proiecția punctului A pe planul (BCD);

b) Calculați lungimea proiecției segmentului $[AB]$ pe planul (ABC);

c) Calculați $\cos\left(\widehat{AB;(BCD)}\right)$;

d) Calculați lungimea proiecției segmentului $[AB]$ pe dreapta CD.

10. Triunghiul echilateral ABC, cu $AB = a$, se proiectează pe planul α după triunghiul dreptunghic $A'BC$.

a) Precizați unghiul drept al triunghiului $A'BC$; *b*) Determinați $m\left(\widehat{AB;\alpha}\right)$.

11. Triunghiul dreptunghic ABC, $BC = 6$, se proiectează pe planul α după triunghiul isoscel $A'BC$ cu $m\left(\widehat{BA'C}\right) = 120°$.

a) Precizați unghiul drept al triunghiului ABC; *b*) Arătați că $AB = AC$;

c) Calculați $\cos\left(\widehat{AC;\alpha}\right)$; *d*) Calculați $d\left(A;\alpha\right)$.

12. În vârful A al pătratului $ABCD$ cu $AB = a$ se ridică perpendiculara AM pe planul pătratului, $AM = a\sqrt{2}$. Calculați:

a) $m\left(\widehat{CM;(ABC)}\right)$; *b*) $\cos\left(\widehat{DM;(ABC)}\right)$.

13. În vârfurile A și B ale pătratului $ABCD$ de centru O se ridică pe planul acestuia, de aceeași parte, perpendicularele AA' respectiv BB'.

Scanned with OKEN Scanner

Se știe că $AB = 7$ cm, $AA' = 2$ cm, $BB' = 9$ cm.

a) Calculați măsura unghiului format de dreapta $A'B'$ cu planul pătratului;

b) Arătați că $m(\widehat{A'B'; AC}) > 45°$; *c*) Arătați că $\text{pr}_{AC}[A'B'] = [AO]$.

14. Pe planul rombului $ABCD$ se ridică perpendiculara AS. Dacă $AS = BD = 14$ cm și $m(\widehat{BAD}) = 60°$, calculați:

a) $m(\widehat{SB;(ABC)})$; *b*) $\cos(\widehat{SC;(ABC)})$;

c) $m(\widehat{OB;(ABC)})$, unde O este mijlocul segmentului $[SC]$.

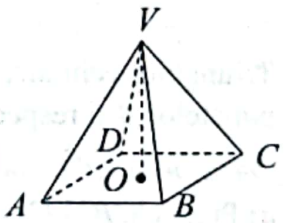
15. Punctul O este intersecția diagonalelor rombului $ABCD$ în care $AB = 8$ și $m(\widehat{ABC}) = 120°$. În punctele O și C se ridică, de aceeași parte a planului (ABC), perpendicularele ON și CM pe planul rombului. Se știe că $ON = 12$ cm și $CM = 24$ cm.

a) Demonstrați că punctele A, N, M sunt coliniare.

b) Determinați $m(\widehat{AM;(ABC)})$; *c*) Calculați $\cos(\widehat{ND;(ABC)})$.

***

16. Piramida $VABCD$ are toate muchiile congruente, egale cu a, și înălțimea VO.



a) Arătați că piramida $VABCD$ este regulată.

b) Determinați $m(\widehat{VA;(ABC)})$.

c) Calculați lungimea proiecției segmentului $[VA]$ pe dreapta CV.

17. Precizați și justificați valoarea de adevăr a propoziției:

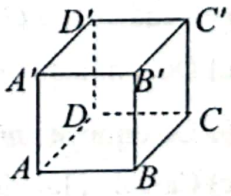
a) Dacă două segmente congruente sunt paralele, atunci proiecțiile lor pe planul α sunt segmente congruente.

b) Dacă proiecțiile pe planul α ale segmentelor $[AB]$ și $[CD]$ sunt segmente congruente, atunci segmentele $[AB]$ și $[CD]$ sunt paralele.

c) Dacă segmentele $[AB]$ și $[CD]$ sunt congruente, atunci proiecția segmentului $[AB]$ pe dreapta CD este un segment congruent cu segmentul reprezentat de proiecția segmentului $[CD]$ pe dreapta AB.

d) Dacă proiecțiile segmentelor $[AB]$ și $[CD]$ pe dreapta d sunt segmente congruente, atunci segmentele $[AB]$ și $[CD]$ sunt congruente.

18. Desenați cubul $ABCDA'B'C'D'$. Dacă $AB = l$, exprimați lungimea segmentului care reprezintă proiecția segmentului:



a) $[BB']$ pe dreapta BC'; *b*) $[BB']$ pe dreapta AD';

c) $[AB']$ pe dreapta $D'C$; *d*) $[AB']$ pe dreapta BC'.

19. Pe planul dreptunghiului $ABCD$ se ridică perpendiculara AM.

Se știe că $AM = 8$ cm, $m(\widehat{BM;(ABC)}) = 30°$ și $m(\widehat{DM;(ABC)}) = 45°$.

Scanned with OKEN Scanner

a) Calculați lungimea proiecției segmentului $[MC]$ pe dreapta AD;

b) Calculați $\cos(\widehat{ACM})$; *c*) Calculați $d(B;MC)$.

20. Punctele E și F sunt mijloacele laturilor $[AC]$ respectiv $[BC]$ ale triunghiului ABC. Pe planul triunghiului ABC se ridică perpendiculara EM.

a) Arătați că, dacă $MA = MB = MC$, atunci triunghiul ABC este dreptunghic.

b) Dacă $AB = 10$ cm și $ME = 5\sqrt{3}$ cm, calculați măsura unghiului format de dreapta MF cu planul triunghiului ABC.

21. Triunghiul ABC este dreptunghic în A și are ipotenuza inclusă în planul α. Fie $A' = \text{pr}_{\alpha} A$. Știind că $AB = 18$ cm, $BC = 30$ cm și $m(\widehat{AB, \alpha}) = 60°$, calculați:

a) lungimea proiecției segmentului $[AB]$ pe planul α;

b) cosinusul unghiului format de dreapta AC cu planul α;

c) lungimea proiecției segmentului AA' pe planul (ABC).

22. Un triunghi echilateral ABC are latura $[BC]$ situată în planul α, iar vârful A se proiectează pe planul α în punctul A'. Măsura unghiului format de dreapta AB cu planul α este de $60°$.

a) Determinați măsura unghiului format de dreapta AC cu planul α.

b) Arătați că $A' \in BC$.

Probleme de șapte stele

23. Triunghiul echilateral ABC are vârful A în planul α, iar B' și C' sunt proiecțiile punctelor B și respectiv C pe planul α.

Dacă $m(\widehat{BAB'}) = m(\widehat{CAC'}) = 45°$ și $AB = 32\sqrt{2}$ cm, demonstrați că:

a) Punctele B și C sunt de aceeași parte a planului α;

b) $BC \parallel \alpha$;

c) Triunghiul $AB'C'$ este dreptunghic.

24. Fie VO înălțimea piramidei triunghiulare regulate $VABC$ în care $BC = 12$ cm și $AV = 8\sqrt{3}$ cm.

a) Determinați măsura unghiului $\widehat{VAO}$;

b) Calculați $\cos(\widehat{AO;(VBC)})$;

c) Calculați lungimea proiecției segmentului $[AO]$ pe planul (VBC).

25. Trapezul isoscel $ABCD$ are $AC = 16$ cm, $AB \parallel CD$, $m(\widehat{ACD}) = 45°$ și $AB = 3CD$. În punctul O de intersecție al diagonalelor trapezului se ridică perpendiculara OM pe planul trapezului, $OM = 12$ cm.

a) Determinați $m(\widehat{AM, (ABC)})$.

b) Determinați $m(\widehat{MB;DC})$.

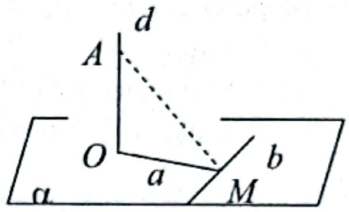
c) Calculați lungimea proiecției segmentului $[DC]$ pe dreapta MB.

Scanned with OKEN Scanner

3.3. Teorema celor trei perpendiculare (T 3 ⊥)

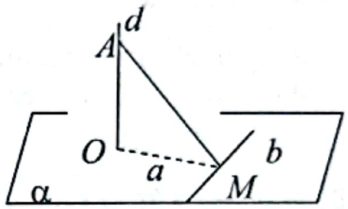
Teorema celor trei perpendiculare

Dacă $\begin{cases} d \perp \alpha, d \cap \alpha = \{O\}, A \in \alpha \\ b \subset \alpha \\ OM \perp b, M \in b \end{cases}$, atunci $AM \perp b$.



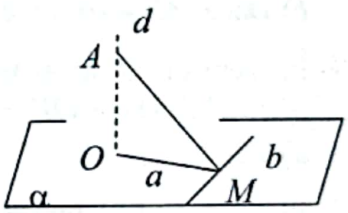
Reciproca întâi a teoremei celor trei perpendiculare (R_1.T.3 ⊥)

Dacă $\begin{cases} d \perp \alpha, d \cap \alpha = \{O\} \\ A \in \alpha, b \subset \alpha, \\ AM \perp b, M \in b \end{cases}$, atunci $OM \perp b$.



Reciproca a doua a teoremei celor trei perpendiculare (R_2.T.3 ⊥)

Dacă $\begin{cases} a, b \subset \alpha \\ a \perp b, a \cap b = \{M\} \\ AM \perp b, A \notin \alpha \\ AO \perp a, O \in a \end{cases}$, atunci $AO \perp \alpha$.



---

1. Reprezentați prin desen un triunghi ABC, $m(\sphericalangle B) = 90°$, și perpendiculara AM pe planul triunghiului ABC. Se știe că $AC = 10$ cm și $AM = BC = 6$ cm.

a) Calculați $d(A;BC)$; *b*) Arătați că $MB \perp BC$;

c) Calculați $d(M;BC)$.

2. Reprezentați prin desen triunghiul ABC, $AB = AC = 15$ cm, și perpendiculara AP pe planul (ABC). Se știe că $BC = 18$ cm, $AP = 16$ cm și că punctul M este mijlocul segmentului $[BC]$.

a) Justificați că $AM \perp BC$; *b*) Calculați $d(A;BC)$;

c) Arătați că $PM \perp BC$; *d*) Calculați $d(P;BC)$.

3. Reprezentați prin desen triunghiul ABC, $m(\sphericalangle A) = 90°$ și perpendiculara AQ pe planul (ABC). Se știe că $AB = 30$ cm, $AC = 40$ cm și $AQ = 24$ cm.

a) Calculați $d(A;BC)$; *b*) Calculați $d(Q;BC)$.

4. Pe planul pătratului $ABCD$ cu centrul O și $AB = 6$ cm, se ridică perpendiculara AN, $AN = 3\sqrt{6}$ cm.

a) Arătați că $NO \perp BD$; *b*) Calculați $d(N;BD)$;

c) Determinați măsura unghiului format de dreapta NO cu planul (ABC).

Scanned with OKEN Scanner

5. Pe planul dreptunghiului $ABCD$, cu $AB = 9$ cm și $BC = 12$ cm, se ridică perpendiculara AM, $AM = 15$ cm

a) Arătați că $MB \perp BC$.

b) Arătați că triunghiul MDC este dreptunghic.

c) Calculați $d(A; BD)$ și $d(M; BD)$.

6. Pe planul triunghiului ABC se ridică perpendiculara AM, $AM = 15$ cm. Fie $MN \perp BC$, $N \in BC$. Se știe că $MN = 25$ cm.

a) Arătați că $AN \perp BC$; *b*) Calculați $d(A; BC)$ și $d(A; MN)$.

7. Pe planul triunghiului ABC dreptunghic în B se ridică perpendiculara AM. Punctul P este proiecția punctului A pe dreapta MB. Arătați că $MB \perp BC$ și $AP \perp (MBC)$.

8. În cubul $ABCDA'B'C'D'$ notăm $\{O\} = AC \cap BD$.

a) Demonstrați că $A'O \perp BD$;

b) Dacă $AB = 10$ cm, calculați distanța de la punctul A la planul $(A'BD)$.

9. În centrul O al pătratului $ABCD$ se ridică perpendiculara OV pe planul pătratului. Dacă $OV = 12$ cm și $AB = 10$ cm. Calculați:

a) $d(V; BC)$; *b*) $d(O; (VBC))$.

10. Piramida patrulateră $VABCD$ are ca bază pătratul $ABCD$ cu centrul O. Se știe că $AB = 8$ cm și $VO = 3$ cm.

a) Calculați lungimea apotemei $[VM]$ a piramidei, unde $M \in (AB)$.

b) Dacă $OP \perp VM$, unde $P \in VM$, arătați că $OP \perp (VBC)$.

c) Calculați $d(O, (VBC))$.

**

11. Piramida patrulateră regulată $VABCD$ are $AB = 8$ cm și înălțimea $VO = 4$ cm.:

a) Calculați $d(V; AB)$. *b*) Calculați $d\big(O; (VAB)\big)$.

12. În cubul $ABCDA'B'C'D'$ notăm $\{O\} = AC \cap BD$.

a) Demonstrați că $A'O \perp BD$;

b) Pentru $AB = 10$ cm, calculați distanța de la vârful A la planul $(A'BD)$.

13. Piramida triunghiulară regulată $VABC$ are înălțimea $VO = 6$ cm și latura bazei $AB = 18$ cm. Calculați:

a) $d(O; (VAB))$; *b*) $d(C; (VAB))$.

14. Fie pătratul $ABCD$, O centrul său, iar M un punct exterior planului pătratului astfel încât $MO \perp (ABC)$ și $MO = 6$ cm. Știind că distanța de la punctul M la dreapta BC este egală cu 10 cm, calculați: *a*) AB; *b*) MB.

15. În vârful B al triunghiului echilateral ABC se ridică perpendiculara $BM \perp (ABC)$ astfel încât $BM = 4$ cm. Știind că $d(M; AC)) = 8$ cm, calculați :

a) AB; *b*) lungimea proiecției segmentului $[MB]$ pe planul (MAC).

Scanned with OKEN Scanner

16. Pe planul triunghiului isoscel ABC se ridică perpendiculara AD.
Se știe că $BC = 48$ cm și $AB = AC = 30$ cm, iar $AD = 18\sqrt{3}$ cm.
a) Calculați $d(D;BC)$; *b*) Aflați $m(\widehat{AD;(DBC)})$; *c*) Calculați $d(A;(DBC))$.

17. În dreptunghiul $ABCD$ notăm $\{O\} = AC \cap BD$. Fie $OE \perp (ABC)$, $OE = 18$ cm.
Știind că $AB = 40$ cm și $BC = 42$ cm, calculați:
a) $d(E;AC)$; *b*) $d(E;AB)$; *c*) $d(O;(EBC))$; *d*) $d(A;(EBC))$.

18. Fie M mijlocul laturii AD a dreptunghiului $ABCD$ cu $AB = 6$ cm și $AD = 12$ cm.
În punctul M se ridică perpendiculara ME pe planul dreptunghiului, $ME = 6$ cm.
a) Determinați $m(\widehat{ED;BC})$; *b*) Determinați $m(\widehat{ED;DC})$;
c) Calculați distanța de la punctul E la dreapta BD.

19. Triunghiul ABC are $AB = 9$ cm și $AC = 12$ cm și $BC = 15$ cm. În punctul B se construiește $BM \perp (ABC)$ astfel încât $BM = 15$ cm.
a) Arătați că $m(\widehat{BAC}) = 90°$; *b*) Determinați $m(\widehat{MC;(ABC)})$;
c) Calculați $d(M;AC)$; *d*) Calculați $d(B;(MAC))$.

20. Se ridică perpendiculara BD pe planul triunghiului ABC. Se știe că $DC = 2a\sqrt{2}$ și $AB = AC = AD = 2a$.
a) Calculați BC; *b*) Determinați $m(\widehat{DC;(ABC)})$;
c) Calculați $d(B;AC)$; *d*) Calculați $d(B;(ACD))$.

21. Se dă rombul $ABCD$ cu $AB = 10$ cm. În punctul A se ridică perpendiculara AM pe planul (ABC), $AM = 5$ cm. Calculați distanțele de la punctul M la dreptele AC, BD și respectiv BC dacă:
a) $m(\sphericalangle ABC) = 90°$; *b*) $m(\sphericalangle ABC) = 60°$; *c*) $m(\sphericalangle ABC) = 30°$;
d) $m(\sphericalangle ABC) = 45°$; *e*) $m(\sphericalangle ABC) = 120°$.

22. În centrul O al pătratului $ABCD$ se ridică perpendiculara OV pe planul pătratului. Fie M mijlocul muchiei $[BC]$. Dacă $AB = 8$ cm, $VO = 4\sqrt{3}$ cm, determinați:
a) măsura unghiului format de VM cu planul (ABC);
b) distanța de la punctul O la planul (VBC);
c) distanța de la punctul A la planul (VBC);
d) măsura unghiului format de dreptele AB și VM.

23. Pe planul triunghiului ABC dreptunghic în A ridicăm perpendicularele din punctele A și B, de aceeași parte a planului, pe care considerăm punctele M și N astfel încât $BN < AM$. Notăm cu D punctul de intersecție al dreptei MN cu planul (ABC). Știind că $AC = 2a$, $AB = a\sqrt{3}$, $AM = a$ și că distanța de la punctul M la dreapta CD este $2a$, calculați:
a) aria triunghiului MNC;
b) distanța de la punctul B la planul (MNC).

Scanned with OKEN Scanner

Scanned with OKEN Scanner

***

24. Se consideră un punct M oarecare în interiorul triunghiului echilateral ABC. În punctul M se ridică perpendiculara MP pe planul (ABC). Punctele R, S şi T sunt proiecţiile punctului P pe dreptele AB, BC şi respectiv AC. Demonstraţi că valoarea expresiei $E = PR\cos(\widehat{PRM}) + PS\cos(\widehat{PSM}) + PT\cos(\widehat{PTM})$ nu depinde de poziţia punctului M.

25. Punctul M exterior planului triunghiului ABC este egal depărtat de dreptele AB, BC şi respectiv BC. Arătaţi că proiecţia punctului M pe planul (ABC) este centrul cercului înscris în triunghiul ABC.

26. Se consideră tetraedrul $OABC$ în care $OA \perp OB \perp OC \perp OA$ şi $OA = a$, $OB = b$, $OC = c$. Fie H proiecţia punctului O pe planul (ABC). Arătaţi că:
a) Punctul H este ortocentrul triunghiului ABC;
b) Triunghiul ABC este ascuţitunghic;
c) Are loc relaţia: $(\mathcal{A}_{AOB})^2 + (\mathcal{A}_{COB})^2 + (\mathcal{A}_{AOC})^2 = (\mathcal{A}_{ABC})^2$.

27. În ortocentrul H al triunghiului ABC se ridică perpendiculara HM pe planul triunghiului şi se construieşte $MA_1 \perp BC$, $A_1 \in BC$. Arătaţi că $H \in AA_1$.

28. Se consideră tetraedrul $ABCD$ în care $AB \perp CD$ şi $AC \perp BD$. Arătaţi că:
a) $AD \perp BC$;
b) Proiecţia vârfului A pe planul (BCD) este ortocentrul triunghiului BCD;
c) Cele patru înălţimi ale tetraedrului sunt concurente.

29. Pe planul triunghiului ABC, $m(\sphericalangle A) = 90°$, se ridică perpendiculara BM. Fie $BD \perp AM$, $D \in AM$ şi $BE \perp CM$, $E \in MC$. Arătaţi că:
a) $BD \perp (MAC)$; *b*) $MC \perp (BDE)$.

30. Pe planul dreptunghiului $ABCD$ se ridică perpendiculara AM. Punctele P, Q şi R sunt proiecţiile lui A pe dreptele MB, MC şi respectiv MD. Arătaţi că:
a) $MC \perp (PQR)$; *b*) Punctele A, P, Q şi R sunt coplanare.

Probleme de şapte stele

31. Fie $ABCDA'B'C'D'$ un paralelipiped dreptunghic. Proiecţiile vârfului A' pe diagonalele AB', AD' şi $D'B'$ se notează cu M, N şi respectiv P. Arătaţi că:
a) $A'M \perp (AB'C')$; *b*) dreptele AP, $B'N$ şi $D'M$ sunt concurente.

32. Triunghiul ABC se proiectează pe planul α după triunghiul ABC'. Punctele H şi H' sunt ortocentrele triunghiurilor ABC şi respectiv $A'BC$. Demonstraţi că $HH' \perp (ABC)$.

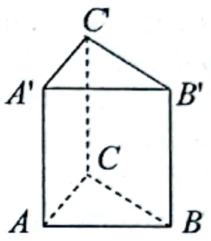
33. Se consideră tetraedrul $ABCD$. Se notează cu O_1, O_2, O_3 şi O_4 centrele cercurilor circumscrise triunghiurilor ABC, BCD, ACD şi ABD. În punctele O_1, O_2, O_3 şi O_4 se duc dreptele d_1, d_2, d_3 şi d_4 perpendiculare pe planele (ABC), (BCD), (ACD) şi respectiv (ABD). Arătaţi că :
a) dreptele d_1 şi d_2 sunt coplanare; *b*) dreptele d_1, d_2, d_3, d_4 sunt concurente.

34. În vârfurile A, B și C ale triunghiului ABC se ridică perpendicularele AA', BB' și CC', de aceeași parte a planului (ABC), astfel încât $AA' = BC$, $BB' = AC$ și $CC' = AB$. Dacă H este ortocentrul triunghiului ABC, iar O este centrul cercului circumscris triunghiului $A'B'C'$, arătați că $HO \perp (A'B'C')$.

TESTE DE EVALUARE

Testul 1

1. În figura alăturată este reprezentată o prismă triunghiulară regulată în care $AB = 4$ cm și $AB' = 8$ cm.



(1p) *a)* Precizați $\text{pr}_{(ABC)}B'$;

(1p) *b)* Precizați $\text{pr}_{(ABC)}[AB']$;

(1p) *c)* Determinați $m(\widehat{AB';(ABC)})$;

(1p) *d)* Calculați lungimea proiecției segmentului $[BB']$ pe dreapta AB';

(1p) *e)* Calculați distanța de la centrul fețeI $ABB'A'$ la planul (ABC).

2. În tetraedrul regulat $ABCD$ cu $AB = 6$ cm, avem $O = \text{pr}_{(BCD)}A$.

(1p) *a)* Arătați că $OD = OB = OC$;

(1p) *b)* Arătați că $OD \perp BC$;

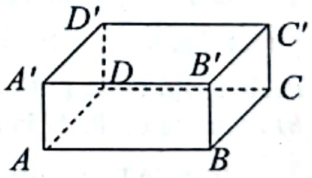
(1p) *c)* Calculați OB;

(1p) *d)* Calculați OA.

NOTĂ. Timp de lucru 45 minute. Se acordă 1 punct din oficiu.

Testul 2

1. În figura alăturată este reprezentat un paralelipiped dreptunghic în care $AA' = 8$ cm, $AB = BC = 8\sqrt{3}$.



(1p) *a)* Justificați că $A'B \perp BC$;

(1p) *b)* Precizați $\text{pr}_{(ABC)}[A'B]$;

(1p) *c)* Determinați $m(\widehat{A'B;(ABC)})$;

(1p) *d)* Dacă $\{O\} = AC \cap BD$, arătați că $A'O \perp BD$;

(1p) *e)* Calculați $d(A';BD)$.

2. Se consideră piramida patrulateră regulată $SABCD$ în care $AB = 2$ cm și înălțimea $SO = \sqrt{3}$ cm.

(1p) *a)* Calculați apotema piramidei;

(1p) *b)* Aflați măsura unghiului format de apotema piramidei cu planul bazei;

(1p) *c)* Calculați distanța de la punctul O la planul (SBC);

(1p) *d)* Calculați lungimea proiecției segmentului $[SO]$ pe planul (SBC).

NOTĂ. Timp de lucru 45 minute. Se acordă 1 punct din oficiu.

Scanned with OKEN Scanner

Testul 3

(2p) 1. Notăm cu E mijlocul muchiei $[BC]$ a prismei triunghiulare regulate $ABCA'B'C'$. Scrieți cu cine este egală:

a) proiecția pe planul (ABC) a segmentului $[A'C]$;

b) distanța de la vârful A' la dreapta BC;

c) distanța de la vârful A la planul (BCC');

d) proiecția pe planul (BCC') a segmentului $[AC']$.

(2p) 2. Rombul $ABCD$ are loc $AC = 8$ cm, $BD = 6$ cm. În punctul C se ridică perpendiculara CM pe planul rombului astfel încât $CM = 3$ cm. Calculați:

a) aria triunghiului MBD;

b) distanța de la punctul M la dreapta AB.

(2p) 3. Piramida triunghiulară regulată $VABC$ are $AB = 12$ cm, iar muchia VB formează cu planul bazei un unghi cu măsura de $45°$.

a) Calculați lungimea înălțimii VO;

b) Calculați distanța de la centrul bazei la o față laterală.

(3p) 4. Prisma patrulateră regulată $ABCDA'B'C'D'$ are $AB = 20$ cm și $AA' = 18$ cm. Notăm cu O intersecția diagonalelor AC și BD. Calculați:

a) distanța de la vârful A' la dreapta BD;

b) $\sin(\widehat{A'BC})$;

c) distanța de la mijlocul M al muchiei AA' la planul $(A'BD)$.

Testul 4

(2p) 1. Completați spațiile punctate astfel încât să obțineți propoziții adevărate. În piramida patrulateră regulată $VABCD$, se consideră înălțimea $VO = OA$ și $OM \perp BC$, $M \in BC$.

a) $\text{pr}_{(BCC)} VA = \ldots\ldots$; *b)* $m(\widehat{VA, (ABC)}) = \ldots\ldots$;

c) $d(V, BC) = \ldots\ldots$; *d)* $d(B, AC) = \ldots\ldots$.

(2p) 2. Fie E mijlocul laturii DC a pătratului $ABCD$ de latură $AB = 10$ cm. În punctul E se construiește $EM \perp (ABC)$ cu $EM = 5\sqrt{3}$ cm. Calculați:

a) distanța de la punctul M la laturile pătratului;

b) distanța de la M la diagonala AC.

(2p) 3. În prisma triunghiulară $ABCA'B'C'$ se dau $AB = 8$ cm și $AA' = 4\sqrt{3}$ cm.

a) Calculați distanța de la vârful A' la dreapta BC.

b) Calculați $m(\widehat{A'AM})$ unde M este mijlocul muchiei $[BC]$.

(3p) 4. Trapezul isoscel $ABCD$ cu $AB \parallel CD$ are $AB = 20$ cm, $CD = 10$ cm și $m(\widehat{ABC}) = 60°$. În vârful A se ridică perpendiculara $AM \perp (ABC)$ astfel încât $MA = 4$ cm. Calculați:

a) distanța de la punctul M la dreapta BD;

b) aria triunghiului MBC.

(1p) 5. Segmentul $[AB]$ lung de 14 dm se proiectează pe un plan α după segmentul $[A'B']$ lung de $7\sqrt{3}$ dm. Calculați măsura unghiului format de dreapta AB cu planul α.

Scanned with OKEN Scanner

Fişă pentru portofoliul individual

Numele şi prenumele: _____

Clasa a VIII-a ____ G5

Tema I.1: Unghiul unei drepte cu un plan. Lungimea proiecţiei unui segment. Teorema celor trei perpendiculare.

(2p) 1. Se dă un plan α şi două puncte $A, B \notin \alpha$.

a) Dacă $AB = 10$ cm, atunci lungimea maximă a proiecţiei segmentului $[AB]$ pe planul α este:

A. 0 cm; **B.** 5 cm ; **C.** 20 cm; **D.** 10 cm.

b) Dacă $pr_\alpha AB = 6$ cm, atunci lungimea minimă a segmentului AB este:

A. 6 cm; **B.** 0 cm ; **C.** 12 cm; **D.** nu se poate determina exact.

c) Dacă $AB = 12cm$ şi $pr_\alpha AB = 6cm$, atunci $m(\measuredangle(AB,\alpha))$ este:

A. 0°; **B.** 60° ; **C.** 30°; **D.** 90°.

d) Dacă $AB = 16$ cm şi $pr_\alpha AB = 8\sqrt{2}$ cm, atunci $m(\measuredangle(AB,\alpha))$ este:

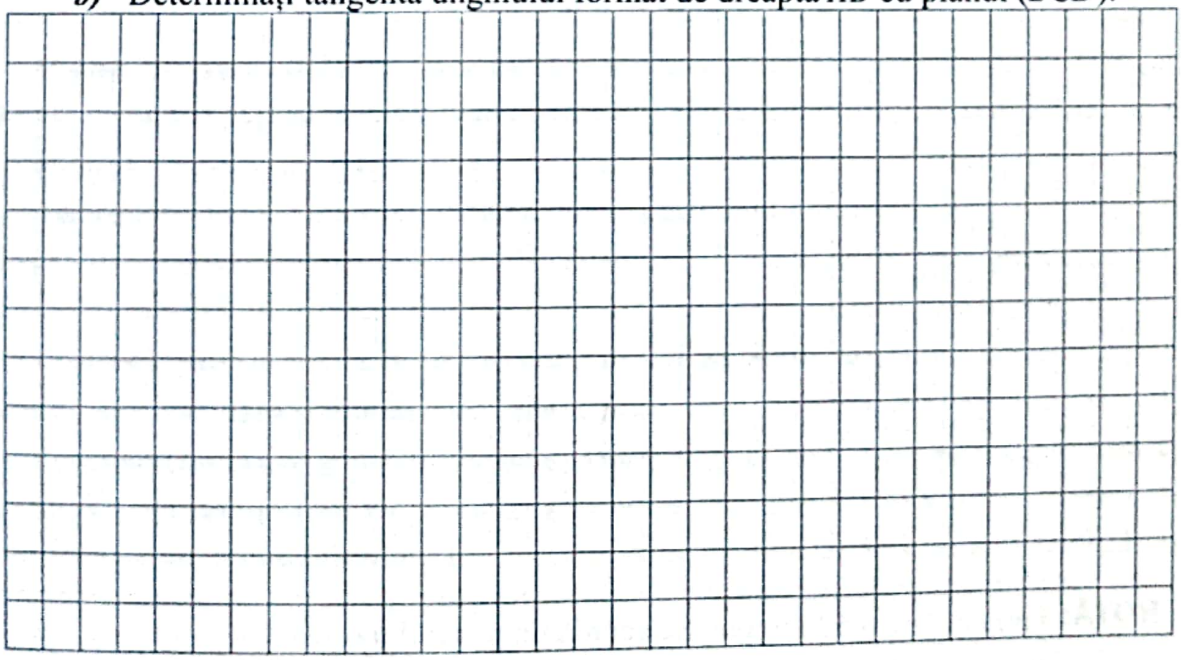
A. 30°; **B.** 0° ; **C.** 45°; **D.** 90°.

La următoarele subiecte scrieţi pe fişa de evaluare rezolvările complete.

(3p) 2. Fie $ABCD$ un tetraedru regulat de latură 10 cm.

a) Determinaţi distanţa de la punctul A la planul (BCD)

b) Determinaţi tangenta unghiului format de dreapta AB cu planul (BCD).



Scanned with OKEN Scanner

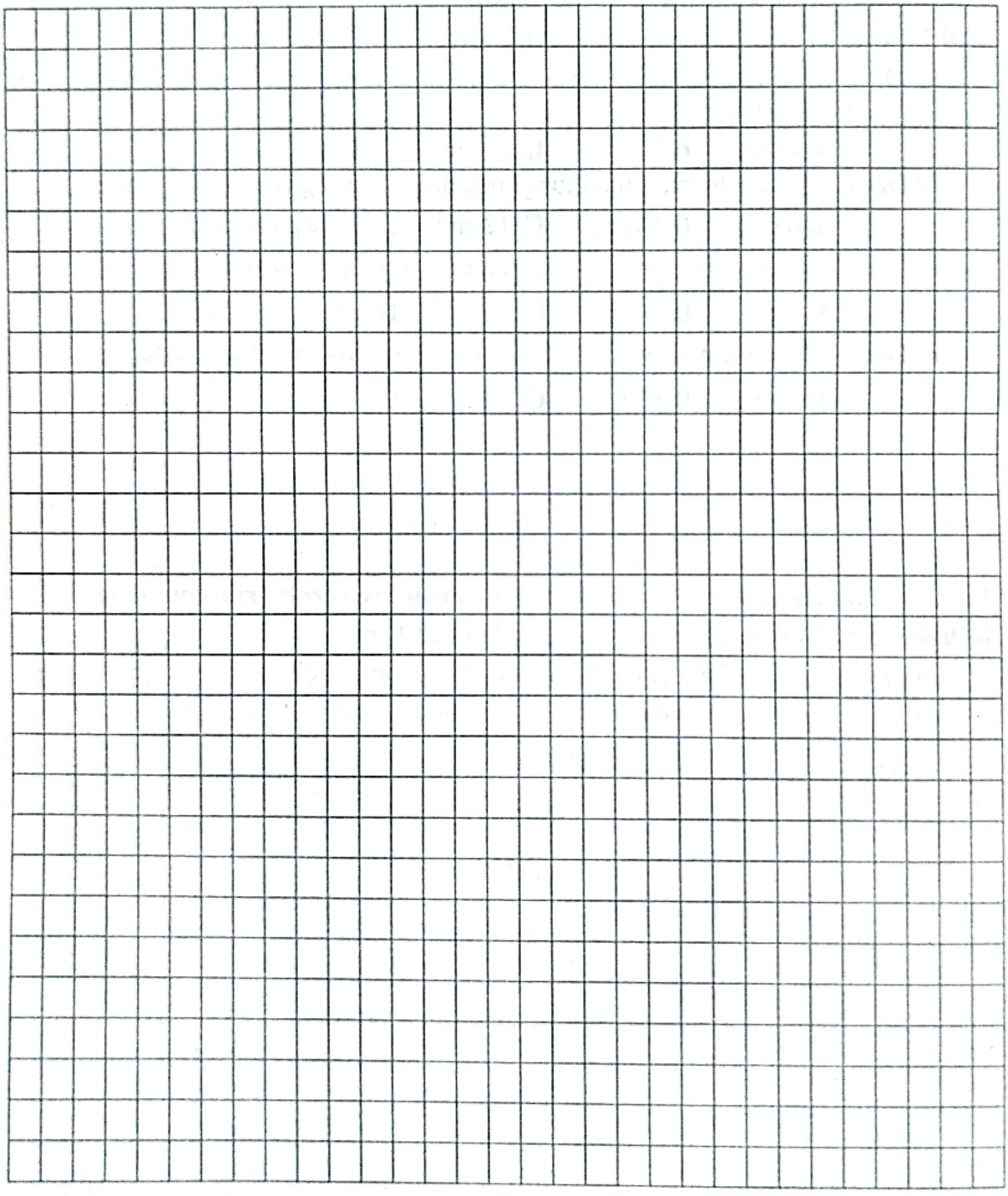
(4p) 3. $ABCDEFGH$ este o prismă patrulateră regulată cu $AB=BC=16$cm şi $AE=5$cm.

a) Să se determine lungimea diagonalei AG .

b) Să se determine lungimea proiecției segmentului $[CE]$ pe planul (ABD).

c) Să se calculeze cosinusul unghiului format de AG cu planul (EHD).

d) Să se calculeze distanţa de la punctul E la dreapta DB .

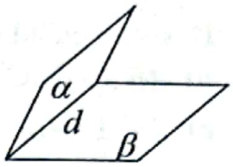


NOTĂ: Timp de lucru 50 minute. Se acordă un punct din oficiu.

Scanned with OKEN Scanner

3.4. Unghi diedru. Plane perpendiculare

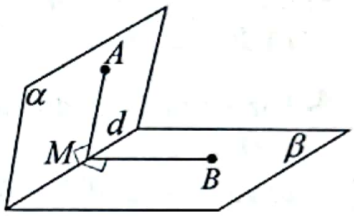
Unghiul diedru este configurația formată din două semiplane conținute în plane diferite, care sunt delimitate de aceeași dreaptă.



În figura alăturată, dreapta d determină în planele α și β două semiplane s_1 și s_2. Ele formează unghiul diedru notat $(\widehat{s_1;s_2})$. Semiplanele s_1 și s_2 se numesc *fețele diedrului*, iar dreapta d se numește *muchia diedrului*.

Definiție: Unghiul format de două perpendiculare pe muchia unui diedru, conținute respectiv în fețele diedrului și concurente într-un punct al muchiei diedrului se numește *unghi plan corespunzător diedrului*.

Dacă $\begin{cases}\alpha\cap\beta=d\\ M\in d\\ A\in\alpha, AM\perp d\\ B\in\beta, BM\perp d\end{cases}$, atunci $m(\widehat{\alpha;\beta})=m(\widehat{MA;MB})$.



Definiție: Cea mai mică măsură a unghiurilor diedre determinate de planele α și β se numește *măsura unghiului celor două plane* și se notează $m(\widehat{\alpha,\beta})$.

Consecință. Dacă $\begin{cases}\alpha\cap\beta=d\\ a\subset\alpha,\ a\perp d\\ b\subset\beta,\ b\perp d\end{cases}$, atunci $m(\widehat{\alpha;\beta})=m(\widehat{a;b})$.

Teoremă. Fie α și β două plane secante și $d=\alpha\cap\beta$. Dacă planul γ este perpendicular pe dreapta d, iar $\gamma\cap\alpha=a$, $\gamma\cap\beta=b$, atunci $m(\widehat{\alpha;\beta})=m(\widehat{a;b})$.

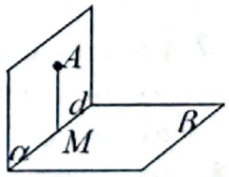
Observație: Dacă planele α și β coincid sau sunt paralele, atunci $m(\widehat{\alpha;\beta})=0°$.

Plane perpendiculare. Dacă măsura unghiul planelor α și β este de $90°$, atunci planele α și β se numesc *plane perpendiculare*. Notăm $\alpha\perp\beta$ sau $\beta\perp\alpha$.

Criteriu de perpendicularitate a două plane

Teoremă: Două plane sunt perpendiculare dacă unul dintre ele conține o dreaptă perpendiculară pe celălalt.

Dacă $d\perp\beta$ și $d\subset\alpha$, atunci $\alpha\perp\beta$.



Consecință: Dacă $\alpha\perp\beta$, $\alpha\cap\beta=d$, $M\in d$ și $A\in\alpha\setminus d$, atunci $AM\perp d$ dacă și numai dacă $AM\perp\alpha$.

Observație: Dacă un poligon convex $\mathcal{P}$ de arie S se proiectează pe un plan după un alt poligon convex (sau un segment) a cărui arie S', atunci $S'=S\cos u$, unde u este măsura unghiului planelor.

Scanned with OKEN Scanner

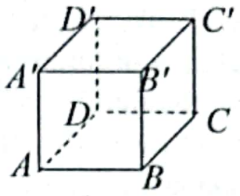
Scanned with OKEN Scanner

✻

1. Desenați cubul din figură. Arătați că:

a) $AB \perp (BCC')$; *b)* $(ABC) \perp (BCC')$;

c) $AA' \perp (ABC)$; *d)* $(ACC') \perp (ABC)$.



2. Considerăm cubul $ABCDA'B'C'D'$.

a) Arătați că $A'B \perp BC$; *b)* Demonstrați că $m(\widehat{(A'BC);(ABC)}) = m(\widehat{A'BA})$;

c) Determinați $m(\widehat{(A'BC);(ABC)})$.

3. Considerăm cubul $ABCDA'B'C'D'$. Demonstrați că:

a) $B'C \perp BC'$; *b)* $B'C \perp (ABC')$; *c)* $(A'B'C) \perp (ABC')$.

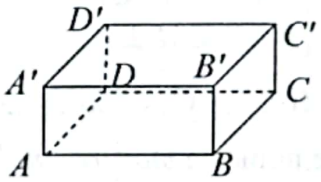
4. Paralelipipedul dreptunghic $ABCDA'B'C'D'$ are $AB = 9$ cm, $AA' = 3\sqrt{3}$ cm și $AD = 3$ cm.

a) Arătați că $A'B \perp BC$;

b) Determinați $m(\widehat{(A'BC);(ABC)})$;

c) Arătați că $A'D \perp DC$;

d) Determinați $m(\widehat{(A'B'C);(ABC)})$.



5. Se dă prisma patrulateră regulată $ABCDA'B'C'D'$, cu $AB = a\sqrt{3}$ și $AA' = a$.

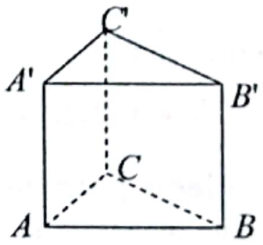
a) Arătați că $A'B \perp BC$; *b)* Determinați $m(\widehat{(A'BC);(ABC)})$.

6. Se consideră prisma triunghiulară regulată $ABCA'B'C'$ reprezentată în figura alăturată. Punctul M este mijlocul muchiei $[BC]$. Se știe că $AB = 6$ cm și $AA' = 3$ cm.

a) Determinați $m(\widehat{(ABB');(BCC')})$;

b) Calculați $d(A';BC)$;

c) Determinați $m(\widehat{(A'BC);(ABC)})$;



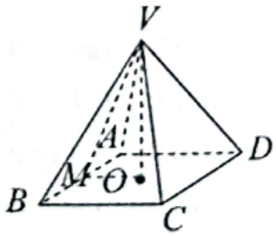
7. Prisma triunghiulară regulată $ABCA'B'C'$ are $AB = 8\sqrt{3}$ cm iar măsura unghiului diedru format de planul $(C'AB)$ cu planul (ABC) este de 45°. Calculați:

a) înălțimea prismei; *b)* aria triunghiului $C'BA$.

8. Piramida patrulateră regulată $VABCD$ este reprezentată în figura alăturată. Înălțimea piramidei este $[VO]$, iar punctul M este mijlocul muchiei $[AB]$. Se știe că $BC = VM = 4$ cm.

a) Arătați că $VM \perp AB$; *b)* Arătați că $OM \perp AB$;

c) Determinați $m(\widehat{(VAB);(ABC)})$.



9. Se consideră o piramidă triunghiulară regulată $VABC$ cu înălțimea $VO = 2$ cm și $AB = 4\sqrt{3}$ cm.

a) Calculați lungimea apotemei bazei;

b) Determinați măsura unghiului format de o față laterală a piramidei cu planul bazei.

10. Piramida triunghiulară regulată $ABCD$ cu baza ABC are $AB = 6\sqrt{3}$ cm, iar unghiul diedru format de (DBC) și (ABC) are măsura de $60°$. Calculați:

a) înălțimea piramidei;

b) distanța de la centrul bazei la o față laterală;

c) tangenta unghiului format de o muchie laterală cu planul bazei.

11. Un triunghi dreptunghic ABC are catetele $AB = 3$ cm și $AC = 4$ cm. Triunghiul ABC se proiectează pe planul α după triunghiul $A'B'C'$.

a) Calculați aria triunghiului ABC.

b) Calculați aria triunghiului $A'B'C'$ în fiecare din cazurile:

i) $m(\widehat{(ABC);\alpha}) = 60°$; *ii*) $m(\widehat{(ABC);\alpha}) = 30°$; *iii*) $m(\widehat{(ABC);\alpha}) = 45°$.

**

12. Triunghiul ABC cu $AB = 9$ cm, $AC = 15$ cm și $BC = 12$ cm are latura $[AB]$ paralelă cu planul α. Triunghiul se proiectează pe planul α după triunghiul $A'B'C'$ cu $B'C' = 6$ cm.

a) Calculați aria triunghiului $A'B'C'$;

b) Calculați cosinusul unghiului diedru format de planul (ABC) cu planul α.

13. În triunghiul ABC se cunosc $AB = 3$ cm, $AC = 4$ cm, $BC = 5$ cm. În vârfurile triunghiului, de aceeași parte a planului (ABC) se ridică perpendicularele AA', BB' și CC'. Se știe că triunghiul $A'B'C'$ are aria egală cu $4\sqrt{3}$ cm^2.

a) Aflați aria triunghiului ABC.

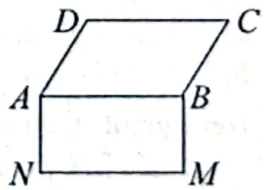
b) Determinați măsura unghiului diedru format de planele (ABC) și $(A'B'C')$.

14. Triunghiul ABC are $AB = 20$ cm, $BC = 13$ cm și $AC = 21$ cm. Proiecția triunghiului ABC pe planul α este triunghiul $A'B'C'$ a cărui arie este de 63 cm^2.

a) Calculați aria triunghiului ABC;

b) Determinați măsura unghiului diedru format de planul (ABC) cu planul α.

15. Pătratul $ABCD$ și dreptunghiul $ABMN$ sunt situate în plane diferite (vezi figura).



Se știe că $AN = AD = 2\sqrt{3}$ cm și $DN = 6$ cm.

a) Arătați că $m(\widehat{(DNM);(AMN)}) = m(\widehat{DNA})$.

b) Determinați $m(\widehat{(DNM);(AMN)})$.

c) Determinați $m(\widehat{(DAB);(AMN)})$.

16. Triunghiul echilateral ABC se proiectează pe planul α după triunghiul $A'B'C'$. Calculați AB în fiecare din cazurile:

a) $m(\widehat{(ABC);\alpha}) = 60°$, $\mathcal{A}_{A'B'C'} = 24\sqrt{3}$ cm^2;

Scanned with OKEN Scanner

b) $m(\widehat{(ABC);\alpha}) = 30°$, $\mathcal{A}_{A'B'C'} = 24\ cm^2$;

c) $m(\widehat{(ABC);\alpha}) = 45°$, $\mathcal{A}_{A'B'C'} = 24\sqrt{6}\ cm^2$.

17. Dreptunghiul $ABCD$ şi pătratul $ABEF$ sunt situate în plane perpendiculare. Se ştie că $AB = 20$ cm şi $BC = 15$ cm.

a) Arătaţi că $AF \perp (BCD)$ *b)* Calculaţi $d(E;AC)$;

c) Calculaţi aria triunghiului AEC; *d)* Calculaţi $\cos(\widehat{(ACE);(ACB)})$;

e) Calculaţi $\cos(\widehat{(DCE);(ACB)})$; *f)* Determinaţi $tg(\widehat{(ABC);(CEF)})$.

18. Triunghiul echilateral ABC şi triunghiul isoscel ACD, $AD = CD$ sunt situate în plane perpendiculare, iar punctul M este mijlocul segmentului $[AC]$.

a) Arătaţi că $DM \perp (ABC)$;

b) Ştiind că $AB = 16$ cm şi $BD = 4\sqrt{21}$ cm, calculaţi:

i) $d(D;(ABC))$; *ii)* $m(\widehat{(ABD);(ABC)})$.

19. Rombul $ABCD$ cu centrul O şi $AC = 24$ cm şi $BD = 18$ cm se îndoaie după diagonala $[BD]$ până când planele (ABD) şi (BCD) devin perpendiculare.

a) Arătaţi că, după îndoire, $CO \perp (ABD)$;

b) Determinaţi cosinusul unghiului diedru format, după îndoire, de planele (ADC) şi (BCD).

20. Un pătrat $ABCD$ se îndoaie după diagonala AC până când planele (ACB) şi (ACD) devin perpendiculare. Se ştie că $AB = 10$ cm.

a) Calculaţi distanţa, după îndoire, dintre punctele D şi B.

b) Determinaţi $m(\widehat{BAD})$, după îndoire.

c) Calculaţi sinusul unghiului diedru determinat, după îndoire, de planele (ADB) şi (CDB).

***

21. Dreptunghiul $ABCD$ în care $AB = 24$ cm şi $BC = 18$ cm se îndoaie după diagonala $[AC]$.

a) Calculaţi distanţa, după îndoire, de la punctul B la planul (BCD);

b) Calculaţi distanţa, după îndoire, dintre punctele B şi D.

22. Hexagonul regulat $ABCDEF$ de centru O şi $AB = 6$ cm se îndoaie după diagonala $[AD]$ până când patrulaterul $BCEF$ devine pătrat. Calculaţi:

a) măsura unghiului EDC, după îndoire;

b) cosinusul unghiului diedru determinat de planele (BCE) şi (ABC) după îndoire;

c) cosinusul unghiului diedru determinat de planele (BCE) şi (ADE) după îndoire.

23. Precizaţi şi justificaţi valoarea de adevăr a propoziţiilor:

a) Dacă două plane sunt perpendiculare, atunci orice dreaptă conţinută într-unul dintre plane este perpendiculară pe cel de-al doilea plan.

b) Planele α şi β, $\alpha \cap \beta = d$, sunt perpendiculare, dacă planul α conţine o

Scanned with OKEN Scanner

dreaptă perpendiculară pe dreapta d.

c) Dacă $\alpha \cap \beta = a$, $\gamma \cap \delta = b$, $\alpha \parallel \gamma$ şi $\beta \parallel \delta$, atunci $m(\widehat{\alpha;\beta}) = m(\widehat{\gamma;\delta})$.

d) Două plane diferite, perpendiculare pe un al treilea plan, sunt paralele între ele.

e) Dacă $\alpha \cap \beta = a$, $\alpha \perp \gamma$ şi $\beta \perp \gamma$, atunci $a \perp \gamma$.

f) Dacă $\alpha \parallel \beta$, atunci $m(\widehat{\alpha;\gamma}) = m(\widehat{\beta;\gamma})$.

24. În vârful C al dreptunghiului $ABCD$ se ridică perpendiculara $CM = 4{,}8$ cm pe planul dreptunghiului. Ştiind că $AB = 8$ cm, $BC = 6$ cm, determinaţi măsura unghiului diedru format de planele (MBD) şi (ABC).

25. În centrul O al pătratului $ABCD$ se ridică perpendiculara OV pe planul pătratului. Ştiind că $AB = 20$ cm şi $VO = 10\sqrt{3}$ cm, calculaţi măsura unghiului diedru format de planele:

a) (VBC) şi (ABC); *b*) (VBC) şi (VAD).

26. În centrul O al pătratului $ABCD$ se ridică perpendiculara OS pe planul acestuia. Se ştie că $AB = 10$ cm şi $OS = 5\sqrt{2}$. Calculaţi:

a) cosinusul unghiului diedru format de planele (SAB) şi (SAD);

b) $m(\widehat{ASC})$;

c) sinusul unghiului diedru format de planele (SAB) şi (SDC);

d) distanţa de la punctul O la planul (SBC);

e) aria proiecţiei triunghiului SAB pe planul (ABC).

Probleme de şapte stele

27. Punctul S este exterior planului dreptunghiului $ABCD$ astfel încât $SA = SB = SC = SD = 20$ cm. Ştiind că $AB = 24$ cm şi $BC = 18$ cm, calculaţi:

a) distanţa de la punctul S la planul (ABC);

b) cosinusul unghiului diedru format de planele (SBC) şi (ABC).

28. În punctul O de intersecţie a diagonalelor pătratului $ABCD$ de latură a se ridică o perpendiculară $OM = h$. Determinaţi măsura unghiului diedru al planelor (MBC) şi (ABD), ştiind că h este soluţie a ecuaţiei: $4x^2 - 4ax + a^2 = 0$.

29. Fie pătratul $ABCD$ cu $AB = 22$ cm. De aceeaşi parte a planului (ABC) se ridică pe acesta perpendicularele $DM = 11\sqrt{2}$ cm şi $BN = 11\sqrt{6}$ cm.
Calculaţi măsura unghiului diedru format de planele (MAC) şi (NAC).

30. Triunghiul ABC are $AB = 5$ cm, $AC = 10$ cm şi $m(\widehat{BAC}) = 120°$. În punctul A se ridică perpendiculara AM pe planul triunghiului astfel încât triunghiul MBC să fie dreptunghic în M. Aflaţi valoarea sinusului unghiului plan corespunzător unghiului diedru al planelor (BMC) şi (ABC).

Scanned with OKEN Scanner

3.5. Calculul unor distanțe și măsuri de unghiuri pe fețele sau în interiorul corpurilor studiate

1. Distanța dintre două puncte este lungimea segmentului determinat de cele două puncte.

Exemplu. În paralelipipedul $ABCDA'B'C'D'$ în care $AB = a$, $AD = b$ și $AA' = c$, *lungimea diagonalei* $d = AC'$ este egală cu $d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.

Observație. Dacă paralelipipedul $ABCDA'B'C'D'$ este un cub în care $AB = AD = AA' = a$, atunci *lungimea diagonalei cubului* este egală cu $d = a\sqrt{3}$.

2. Distanța de la un punct A la dreapta BC este egală cu lungimea înălțimii din vârful A pe latura $[BC]$ în triunghiul ABC.

3. Distanței de la un punct S la un plan (ABC) este egală cu lungimea înălțimii din S pe fața (ABC) în tetraedrul $SABC$.

4. Distanța dintre o dreaptă d și planul α, $d \parallel \alpha$, este $d(M;\alpha)$, unde $M \in d$.

5. Distanța dintre două plane paralele α și β este egală cu $d(M;\alpha) = d(N;\beta)$, unde $M \in \beta$ și $N \in \alpha$.

6. Distanța dintre două drepte necoplanare a și b este egală cu $d(\alpha;\beta) = d(\beta;\alpha)$, unde $a \subset \alpha$, $b \subset \beta$ și $\alpha \parallel \beta$.

Observație: Distanța dintre două drepte necoplanare a și b este egală cu lungimea segmentului perpendicular pe cele două drepte și care are câte un capăt pe fiecare dreaptă (*perpendiculara comună* a celor două drepte).

---

*

1. Calculați lungimea diagonalei unui paralelipiped dreptunghic cu dimensiunile $L = 6$ cm, $l = 8$ cm și $h = 24$ cm.

2. Paralelipipedul dreptunghic $ABCDA'B'C'D'$ are $AB = 8$ cm, $BC = 6$ cm și $AA' = 5\sqrt{3}$ cm.

a) Calculați distanța de la punctul D la planul $(D'AC)$.

b) Determinați măsura unghiului diedru format de planele $(D'AC)$ și $(AA'C')$.

3. Paralelipipedul dreptunghic $ABCDA'B'C'D'$ are $AB = 12$ cm, $BC = 16$ cm și aria triunghiului $CC'D'$ egală cu 54 cm^2. Calculați:

a) înălțimea paralelipipedului;

b) lungimea diagonalei paralelipipedului;

c) $\sin(\widehat{AC'C}) + \cos(\widehat{AC'A'})$.

4. Notăm cu E mijlocul muchiei BB' a paralelipipedului dreptunghic $ABCDA'B'C'D'$ în care $AB = 12$ cm, $BC = 16$ cm și $CC' = 20$ cm, iar O este intersecția diagonalelor paralelipipedului. Calculați:

a) distanța de la punctul A la planul (DBB');

Scanned with OKEN Scanner

b) distanța EO;

c) $\sin(\widehat{EOB'})$.

5. În paralelipipedul dreptunghic $ABCDA'B'C'D'$ cu $AB = 4$ cm, $BC = 3$ cm și $AA' = 5$ cm, calculați:

a) lungimea diagonalei paralelipipedului;

b) lungimea proiecției muchiei $[AB]$ pe dreapta BD'.

6. În paralelipipedul dreptunghic $ABCDA'B'C'D'$ se dau: $AB = CC' = 15$ cm și $BC = 15\sqrt{2}$ cm. Determinați măsura unghiului format de diagonala $D'B$ cu planul (ABC).

7. Paralelipipedul dreptunghic $ABCDA'B'C'D'$ are $AB = 20$ cm și $CD' = 25$ cm.

a) Determinați înălțimea AA' a paralelipipedului.

b) Calculați $\operatorname{tg}(\widehat{AB', DC})$.

c) Știind că există o față laterală cu aria de 150 cm^2 să se calculeze suma tuturor muchiilor paralelipipedului.

8. Paralelipipedul dreptunghic $ABCDA'B'C'D'$ are $AA' = 8$ cm și $A'C' = 8\sqrt{3}$ cm. Calculați:

a) aria triunghiului $AA'C'$; *b*) $m(\sphericalangle AC'A')$;

c) distanța de la vârful C la diagonala AC'.

9. Paralelipipedul dreptunghic $ABCDA'B'C'D'$ are $AB = 16$cm, $BC = 12$ cm și $CC' = 10$ m. Calculați:

a) $d(A', BC)$; *b*) $d(A', DC)$; *c*) $d(A', BD)$; *d*) $d(A', AC)$;

e) $d(A, A'O)$, unde $\{O\} = AC \cap BD$; *f*) $d(A, (A'CD))$.

10. Prisma patrulateră regulată $ABCDA'B'C'D'$ are $AB = 4$ cm și $AA' = 8$ cm. Calculați distanța de la centrul O al pătratului $ABCD$ la dreapta AC'.

11. În prisma patrulateră regulată $ABCDA'B'C'D'$ se cunosc: $AB = 8$ cm, iar măsura unghiului format de AC' și $C'B'$ este de 30°. Calculați:

a) înălțimea prismei; *b*) aria triunghiului $AC'B$.

12. Fie cubul $ABCDA'B'C'D'$ cu $AB = 16$ cm și $M \in [AB]$, $BM = 5$ cm, $N \in [BC]$, $BN = 12$ cm. Calculați perimetrul triunghiului $B'MN$.

**

13. Fie cubul $ABCDA'B'C'D'$ în care $AC' = 9\sqrt{3}$ cm și $BM \perp AC'$, $M \in AC'$.

a) Calculați valoarea raportului $\frac{AM}{MC'}$.

b) Dacă $D'N \perp AC'$, $N \in AC'$, comparați lungimile AM, MN și NC'.

14. Cubul $ABCDA'B'C'D'$ are muchia de 8 cm. Calculați:

a) distanța de la punctul C' la dreapta AB;

b) distanța de la punctul C la planul $(C'BD)$;

Scanned with OKEN Scanner

c) sinusul unghiului format de dreapta DB' cu planul (ABB').

15. În prisma triunghiulară regulată $ABCA'B'C'$ cu $A'C' = 12\sqrt{3}$ cm , distanța de la punctul A' la dreapta BC este egală cu 24 cm. Calculați :
a) înălțimea prismei; *b*) aria triunghiului $BA'C'$.

16. Prisma patrulateră regulată $ABCDA'B'C'D'$ are $AB = 6$ cm și $AA' = 8$ cm. Calculați distanța dintre dreptele AC și BD' .

17. Prisma triunghiulară regulată $ABCA'B'C'$ are $AB = 8$ cm și M este mijlocul muchiei laterale $[BB']$. Determinați lungimea segmentului BB' știind că planele (MAC) și $(MA'C')$ sunt perpendiculare.

18. În trunchiul de piramidă patrulateră regulată $ABCDA'B'C'D'$ se cunosc: $AB = 12$ cm, $A'B' = 6$ cm și apotema trunchiului (înălțimea unei fețe laterale) de 4 cm. Calculați:
a) muchia laterală a trunchiului;
b) înălțimea trunchiului;
c) aria secțiunii $ACC'A'$.

19. Trunchiul de piramidă patrulateră regulată $ABCDA'B'C'D'$ are înălțimea de 6 cm, $AB = 18\sqrt{2}$ cm și $A'B' = 10\sqrt{2}$ cm.
a) Calculați lungimea muchiei laterale a trunchiului;
b) Calculați distanța de la punctul A la planul (DCC');
c) Verificați dacă diagonalele trapezului $ACC'A'$ sunt perpendiculare.

20. Trunchiul de piramidă triunghiulară regulată $ABCA'B'C'$ are $AB = 16$ cm, $A'B' = 4$ cm și $AA' = 10$ cm. Calculați:
a) înălțimea trunchiului de piramidă;
b) distanța de la punctul B la planul $(A'CC')$.

21. Un trunchi de piramidă triunghiulară regulată are latura bazei mari de 12 cm, latura bazei mici de 6 cm și muchia laterală egală cu $\sqrt{61}$ cm. Calculați lungimea înălțimii trunchiului.

22. Fie $VABCD$ piramida patrulateră regulată cu $AB = 12$ cm și înălțimea $VO = 8$ cm.
a) Calculați apotema piramidei.
b) Arătați că proiecțiile punctelor A și C pe muchia $[VB]$ coincid.
c) Calculați sinusul unghiului diedru format de planele (VBC) și (VAD).

23. Fie piramida hexagonală regulată în care $AB = 20$ cm și înălțimea $VO = 12$ cm.
a) Calculați distanța de la punctul O la planul (SDE);
b) Calculați distanța de la punctul A la planul (SDE);
c) Arătați că dreapta SC este perpendiculară pe diagonala BD.

24. VO este înălțimea tetraedrului regulat $VABC$ cu suma lungimilor tuturor muchiilor egală cu 36 cm. Calculați:
a) lungimea înălțimii tetraedrului;
b) distanța de la punctul O la planul (VBC);
c) distanța dintre dreptele AB și CV.

25. Trunchiul de piramidă patrulateră regulată $ABCDA'B'C'D'$ are $A'C \perp AC'$ și laturile bazelor $AB = 9\sqrt{2}$ și $A'B' = 5\sqrt{2}$. Calculați:

Scanned with OKEN Scanner

a) înălțimea trunchiului;
b) distanța de la punctul A' la dreapta BC;
c) distanța de la mijlocul O' al segmentului $A'C'$ la planul (BCC').

***

26. Cubul $ABCDA'B'C'D'$ are $AB = a$.
a) Calculați distanța dintre dreptele AC' și $A'D$;
b) Determinați măsura unghiului format de planele (ABC') și (ACC').

27. Trunchiul de piramidă triunghiulară regulată $ABCA'B'C'$ are $AB = 10$ cm, $A'B' = 6$ cm și $AB' \perp A'B$. Calculați:
a) lungimea muchiei laterale a trunchiului;
b) înălțimea trunchiului;
c) cosinusul unghiului diedru format de planele (ABC) și (ABB').

28. Piramida patrulateră regulată $VABCD$ are înălțimea $VO = 5$ cm și latura bazei $AB = 10$. Calculați:
a) măsura unghiului diedru format de fețele (VBC) cu (ABC);
b) distanța de la centrul bazei O la fața laterală (VBC);
c) lungimea proiecției muchiei $[VA]$ pe planul bazei.

29. Piramida hexagonală regulată $SABCDEF$ are $AB = 10$ cm și înălțimea $SO = 4$ cm. Calculați:
a) distanța de la punctul S la dreapta AB;
b) distanța de la punctul O la planul (SBC).

30. Fie O centrul bazei $ABCDEF$ a piramidei hexagonale regulate $SABCDEF$ în care $AB = 10$ cm și $SO = 12$ cm. Calculați:
a) distanța de la punctul S la dreapta AB;
b) distanța de la mijlocul M al segmentului $[SO]$ la fața laterală (SAB);
c) sinusul unghiului ASD.

31. În piramida patrulateră regulată $VABCD$ se cunosc: $AB = 8$ cm și $\mathcal{A}_{VAB} = 20\,\text{cm}^2$. Calculați:
a) distanța de la vârful V la planul bazei;
b) tangenta unghiului format de o muchie laterală cu planul bazei.

32. Se notează cu M mijlocul înălțimii SO a piramidei patrulatere regulate $SABCD$ cu $AB = 12$ cm și $SO = 16$ cm. Calculați distanța de la punctul M la fețele laterale ale piramidei.

33. Se dă piramida patrulateră regulată $VABCD$ cu înălțimea VO. Știind că $AB = 4\sqrt{5}$ cm și distanța de la punctul O la planul (VAB) egală cu 4 cm, aflați:
a) înălțimea piramidei;
b) tangenta unghiului diedru format de planele (VAB) și (ABC);
c) sinusul unghiului diedru format de planele (VAB) și (VDC).

34. Calculați lungimea muchiei $[VA]$ a piramidei din care provine trunchiul de piramidă care are fața laterală $ABB'A'$ trapez isoscel cu dimensiunile $AB = 16$ cm, $BB' = 10$ cm și $A'B' = 4$ cm.

Scanned with OKEN Scanner

35. În piramida patrulateră regulată $VABCD$ triunghiul VAC este echilateral cu $AC = 10\sqrt{2}$ cm. Calculați:
a) lungimea muchiei bazei piramidei;
b) înălțimea piramidei;
c) apotema piramidei.

36. În piramida triunghiulară regulată $VABC$ se cunosc $AB = 12\sqrt{2}$ cm și $VA = 8\sqrt{6}$ cm. Calculați:
a) măsura unghiului format de muchia VA cu planul bazei;
b) distanța de la centrul bazei la dreapta VA și respectiv la planul (VAB);
c) distanța de la mijlocul E al înălțimii $[VO]$ la muchia VA.

Probleme de șapte stele

37. Piramida patrulateră regulată $VABCD$ are toate muchiile cu lungimea de 8 cm.
a) Calculați măsura unghiului format de muchia $[VA]$ cu planul bazei (ABC).
b) Calculați valoarea sinusului unghiului format de planele a două fețe laterale opuse.

38. Se consideră prisma triunghiulară regulată $ABCA'B'C'$ în care $AB = 6$ cm și $AA' = 3\sqrt{3}$ cm.
a) Calculați distanța de la punctul B la planul $(AB'C')$;
b) Arătați că planele $(AB'C')$ și $(A'BC)$ sunt perpendiculare.

39. Fie paralelipipedul dreptunghic $ABCDA'B'C'D'$ în care $AB = 40$ cm, $BC = 30$ cm, iar planele $(A'BD)$ și $(C'BD)$ sunt perpendiculare.
a) Arătați că $CC' = 24$ cm.
b) Calculați distanța dintre planele $(AB'D')$ și $(C'BD)$.

Scanned with OKEN Scanner

E TESTE DE EVALUARE

Testul 1

1. Se consideră cubul $ABCDA'B'C'D'$ în care $\{O\} = AC \cap BD$, iar $AB = 6$ cm.

(1p) *a*) Calculați lungimea segmentului $[AB']$;

(1p) *b*) Calculați lungimea diagonalei $[AC']$;

(1p) *c*) Arătați că $(ABC') \perp (A'B'C)$;

(1p) *d*) Determinați $m(\widehat{AB';(ABC)})$;

(1p) *e*) Determinați cosinusul unghiului format de planele $(A'BD)$ și (ABD).

2. Se consideră piramida triunghiulară regulată $SABC$ care are $AB = 6$ cm și înălțimea $SO = \sqrt{3}$ cm.

(1p) *a*) Calculați $d(O;BC)$;

(1p) *b*) Determinați $m(\widehat{(SBC);(ABC)})$;

(1p) *c*) Calculați $d(O;(SBC))$;

(1p) *d*) Calculați $d(A;(SBC))$.

NOTĂ. Timp de lucru 45 minute. Se acordă 1 punct din oficiu.

Testul 2

1. Se consideră prisma patrulateră regulată $ABCDA'B'C'D'$ în care $AA' = 8$ cm, $AB = BC = 8\sqrt{3}$.

(1p) *a*) Calculați lungimea segmentului $[AB']$;

(1p) *b*) Justificați că $(ACC') \perp (BDD')$;

(1p) *c*) Arătați că $C'B \perp AB$;

(1p) *d*) Determinați $m(\widehat{(ABC');(ABC)})$;

(1p) *e*) Calculați $d(C;(ABC'))$.

2. Se consideră piramida patrulateră regulată $SABCD$ care are $AB = 8$ cm, înălțimea $SO = 4\sqrt{2}$ cm, iar $P = \text{pr}_{SC}O$.

(1p) *a*) Determinați $m(\widehat{SC;(ABC)})$;

(1p) *b*) Calculați $d(A;SC)$;

(1p) *c*) Dacă Q este mijlocul segmentului $[SA]$, arătați că $(QDB) \perp (PDB)$;

(1p) *d*) Calculați aria proiecției triunghiului QBD pe planul (SBD).

NOTĂ. Timp de lucru 45 minute. Se acordă 1 punct din oficiu.

Scanned with OKEN Scanner

Testul 3

1. Fie E mijlocul laturii DC a pătratului $ABCD$ de latură $AB = 10$ cm. În punctul E se ridică perpendiculara $EM \perp (ABC)$ cu $EM = 5\sqrt{3}$ cm. Calculați:

(1p) ***a)*** distanța de la punctul M la laturile pătratului;

(2p) ***b)*** distanța de la M la diagonala AC.

2. În prisma triunghiulară $ABCA'B'C'$ se cunosc $AB = 8$ cm și $AA' = 4\sqrt{3}$ cm.

(1p) ***a)*** Calculați distanța de la vârful A' la dreapta BC.

(2p) ***b)*** Calculați $m(\widehat{A'AM})$ unde M este mijlocul muchiei $[BC]$.

3. Trapezul isoscel $ABCD$ cu $AB \parallel CD$ are $AB = 20$ cm, $CD = 10$ cm și $m(\sphericalangle ABC) = 60°$. În vârful A se ridică perpendiculara $AM \perp (ABC)$ astfel încât $MA = 4$ cm. Calculați:

(1p) ***a)*** distanța de la punctul M la dreapta BD;

(2p) ***b)*** aria triunghiului MBC.

NOTĂ. Timp de lucru 45 minute. Se acordă 1 punct din oficiu.

Scanned with OKEN Scanner

Fişă pentru portofoliul individual

Numele şi prenumele: _____

Clasa a VIII-a ____ G6

Tema I.2: Unghi diedru. Plane perpendiculare.

(2p) 1. Fie cubul *ABCDEFGH*.

a) Planele (*ABC*) şi (*EGH*) fac între ele un unghi de :
A. 45°; **B.** 15° ; **C.** 90°; **D.** 0°.

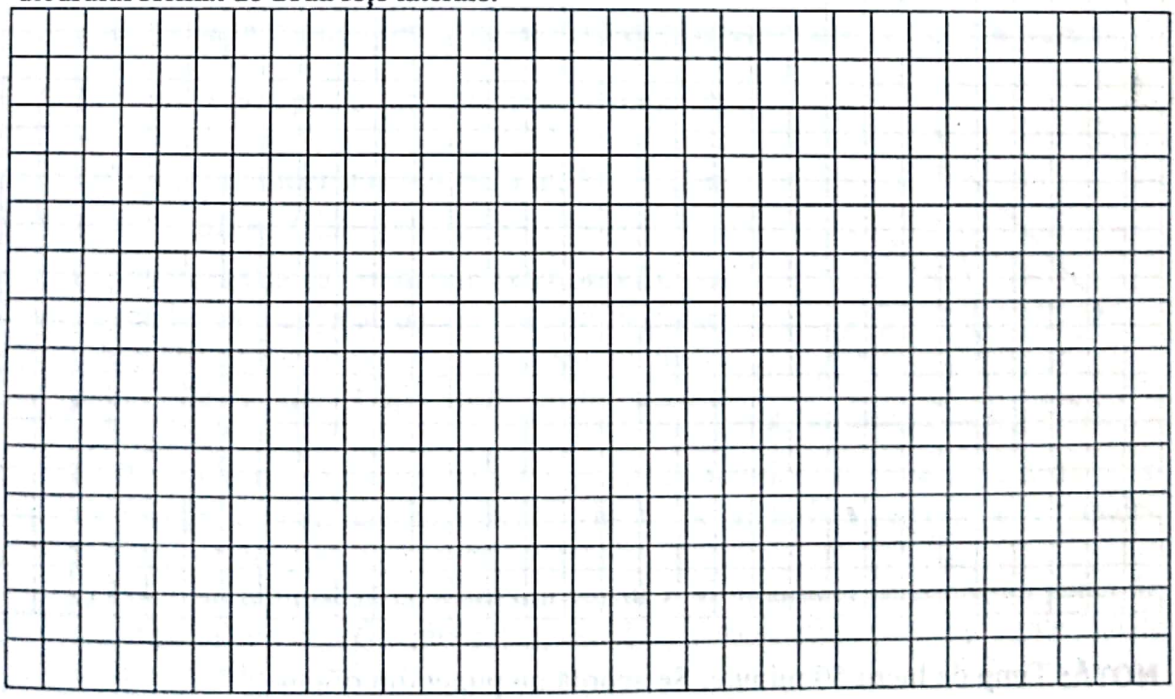
b) Planele (*AGC*) şi (*HFD*) sunt:
A. perpendiculare; **B.** paralele ; **C.** identice.

c) Măsura unghiului plan al diedrului format de (*GFA*) şi de (*BCD*) este:
A. 90°; **B.** 60° ; **C.** 30°; **D.** 45°.

d) Măsura unghiului plan al diedrului format de (*GEC*) şi de (*BAD*) este:
A. 45°; **B.** 15° ; **C.** 90°; **D.** 0°.

La următoarele subiecte scrieţi pe fişa de evaluare rezolvările complete.

(3p) 2. Fie VABC o piramidă triunghiulară regulată de vârf V. Se ştie că VA=10cm şi AB=12cm. ***a)*** Să se determine sinusul unghiului plan al diedrului format de planele (VBC) şi (ABC). ***b)*** Să se determine o funcţie trigonometrică a unghiului plan al diedrului format de două feţe laterale.



Scanned with OKEN Scanner

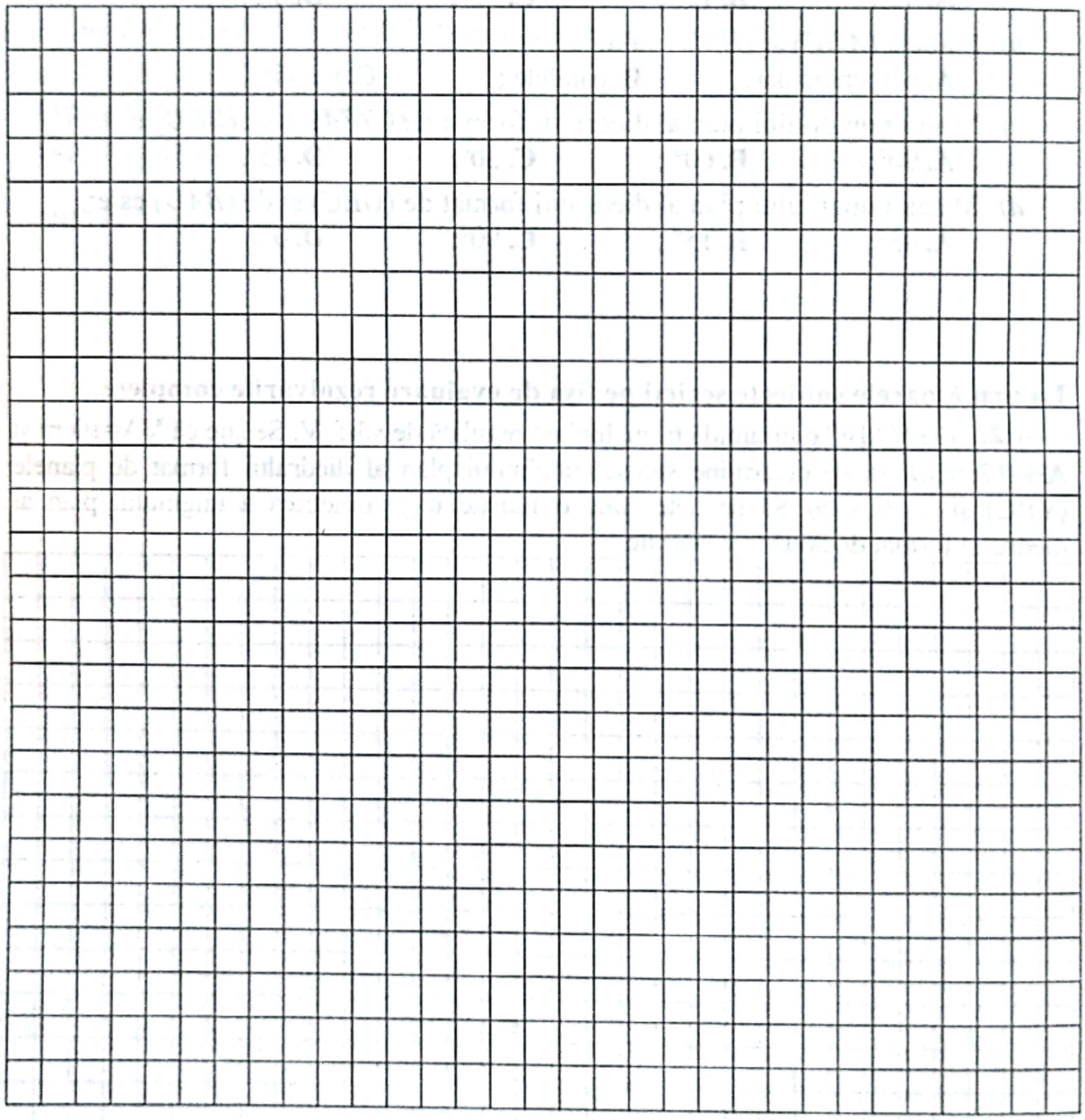
(4p) 3. Fie prisma triunghiulară regulată $ABCDEF$. Se ştie că AB=16cm şi BD=20cm.

a) Găsiţi două perechi de plane perpendiculare.

b) Determinaţi cosinusul unghiului plan al diedrului format de planele (ABC) şi (DBC).

c) Determinaţi cosinusul unghiului plan al diedrului format de planele (ABE) şi (DFC).

d) Determinaţi tangenta unghiului plan al diedrului format de planele (ABC) şi (OBC), unde O este centrul bazei (DEF).

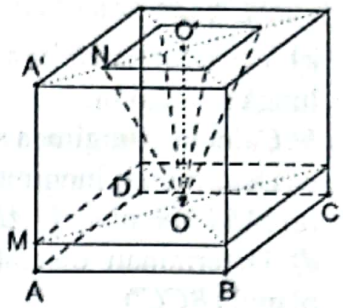


NOTĂ: Timp de lucru 50 minute. Se acordă un punct din oficiu.

Scanned with OKEN Scanner

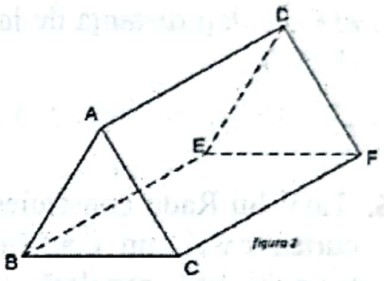
3.6. Probleme cu caracter aplicativ

1. Piesa din figura alăturată s-a obținut dintr-un cub din care s-a scos o piramidă patrulateră regulată. Dacă $AA' = 8$ cm, $AM = 2$ cm, $A'N = 2\sqrt{2}$ cm, calculați:



a) tangenta unghiului dintre dreptele AM și ON;
b) distanța de la M la dreapta BO';
c) distanța de la punctul O la planul $(O'BC)$.

2. Figura alăturată reprezintă schița unui cort în formă de prismă dreaptă care are ca baze triunghiurile echilaterale ABC și DEF. Se știu $BC = 2$ m și $CF = 3$ m.



a) Calculați distanța de la punctul A la planul (BCE).
b) Verificați dacă, pentru confecționarea cortului, sunt suficienți 22 m^2 de pânză specială (toate fețele cortului sunt din pânză, inclusiv podeaua).
c) Determinați lungimea celui mai scurt drum de la vârful A al cortului la muchia $[EF]$.

3. Într-un vas de formă cubică $ABCDEFGH$ se introduce o baghetă de sticlă (CE). Știind că muchia vasului este de 4 cm, determinați:
a) lungimea baghetei;
b) sinusul unghiului format de baghetă cu baza vasului;
c) tangenta unghiului format de baghetă cu peretele lateral $(BCGF)$ al vasului.

4. În *figura 3* este prezentată schematic o piramidă patrulateră regulată din sticlă. Dimensiunile reale ale piramidei sunt $AB = 36$ m, $VO = 24$ m și $AC \cap BD = \{O\}$.

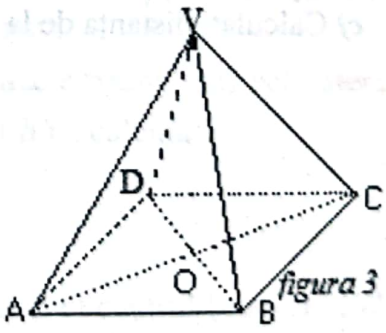


figura 3

a) Pentru spălarea geamului exterior VBC al piramidei este angajat un alpinist utilitar care este plătit cu 2 euro pentru curățarea unui metru pătrat de geam. Câți euro costă această operațiune?
b) Piramida este împodobită cu o panglică multicoloră care pleacă din A și ajunge pe drumul cel mai scurt în C pe suprafața laterală a piramidei. Determinați lungimea panglicii.
c) Poate un alpinist să coboare din vârful V al piramidei până într-un punct M, situat pe înălțimea VO a piramidei, astfel încât să se afle la distanțe egale față de toate vârfurile piramidei?

Scanned with OKEN Scanner

5. În *figura 4* este reprezentat schematic un adăpost antiaerian din beton cu pereții groși de 2 m. $ABCDA'B'C'D'$ și $MNOPM'N'O'P'$ sunt paralelipipede dreptunghice cu $MN = 20$m, $MP = 10$ m și $OO' = 3$ m.

a) Verificați dacă în adăpost încape o vergea lungă de 22,6 m.

b) Calculați lungimea segmentului $[AA']$.

c) Determinați lungimea proiecției segmentului $[MO']$ pe planul (ABC).

d) Determinați distanța de la punctul M la planul (BCC').

e) Calculați distanța de la punctul A la planul (NPP').

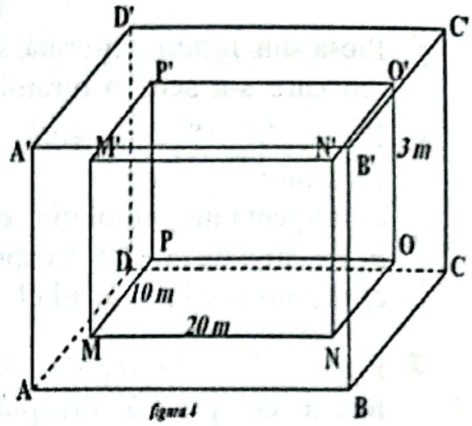
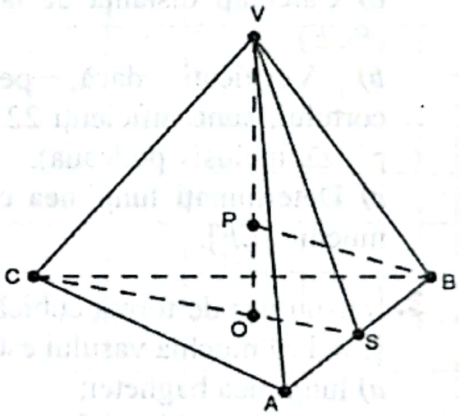


figura 4

6. Tatăl lui Radu construiește pentru fiul său, în curtea casei, un cort în formă de piramidă triunghiulară regulată $VABC$ din bârne de lemn. În centrul bazei pune o bârnă VO înaltă de $4\sqrt{6}$ dm care susține cortul. Deschizătura cortului, VS, este de $6\sqrt{3}$ dm (S este mijlocul muchiei $[AB]$).

a) Cortul este acoperit cu pânză cauciucată, exclusiv podeaua. Care este aria suprafeței de pânză folosită la cort? Rotunjiți rezultatul la un număr întreg de dm^2.



b) Pentru a-și agăța jucăriile, Radu leagă o sfoară între punctele P și B ale cortului, unde P se află pe bârna VO. La ce distanță de vârful cortului trebuie ales punctul P astfel încât triunghiul VPB să fie isoscel de bază $[VB]$?

c) Calculați distanța de la punctul S la CV.

Scanned with OKEN Scanner

3.7. Probleme pentru performanță școlară și olimpiade

1. Un triunghi cu laturile de 9 cm, 10 cm, 17 cm se proiectează pe un plan după un triunghi a cărui arie este egală cu 18 cm^2. Calculați unghiul format de planul triunghiului cu planul de proiecție.

2. Se consideră un triunghi echilateral ABC de latură a și în exteriorul planului său, un punct S astfel încât triunghiurile SAB, SAC și SCB sunt isoscele și dreptunghice în S. Notăm $[DE]$ segmentul ce unește mijloacele segmentelor $[AS]$ și $[BC]$.

a) Calculați DE.

b) Aflați măsurile unghiurilor α și β pe care le face DE, respectiv cu cele două drepte AS și BC.

3. În cubul $ABCDA'B'C'D'$, M este mijlocul muchiei $D'C'$. Știind că $AM = 12$ cm, să se calculeze:

a) Lungimea muchiei cubului.

b) Distanța dintre diagonala AC și diagonala cubului, $D'B$.

4. Fie $VABCD$ o piramidă cu baza pătratul $ABCD$, $VB \perp BC$, $VD \perp BD$, $VA = 10$ cm și $AB = 6$ cm. Calculați:

a) înălțimea piramidei;

b) distanța de la punctul C la planul (VAD).

5. Pătratul $ABCD$, cu $AB = 6$ cm și dreptunghiul $ABEF$ cu $AF = 2$ cm, sunt situate în plane diferite.

a) Determinați poziția punctului $P \in (AB)$ astfel încât $EP + PC$ să fie minim și calculați valoarea acestui minim.

b) Determinați poziția punctului $P \in (AB)$ astfel încât $EP^2 + PC^2$ să fie minim și calculați valoarea acestui minim.

6. Dreptunghiul $ABCD$ cu latura $DC = a$ și $BC = b$ $(a > b)$, se îndoaie de-a lungul diagonalei AC până ce planele ABC și ADC devin perpendiculare . Să se calculeze lungimea segmentului BD astfel obținut .

7. Fie prisma triunghiulară dreaptă $ABCA'B'C'$ cu bazele triunghiuri echilaterale. Dacă $AB = 12$ cm, $AA' = 6\sqrt{6}$ cm și $\{O\} = BC' \cap B'C$, calculați:

a) măsura unghiului dintre AO și $A'B'$;

b) tangenta unghiului dintre AO și (BCB');

c) măsura unghiului dintre (ABC') și (ACB').

8. Fie $VABCD$ o piramidă patrulateră regulată, punctul O centrul bazei $ABCD$ și P un punct situat pe înălțimea piramidei, la o treime de vârful acesteia. Se cunoaște că $VO = AB = 6$ cm.

a) Arătați că raportul dintre aria triunghiului PBC și aria triunghiului VBC aparține intervalului $\left(\frac{2}{3}, \frac{\sqrt{6}}{3}\right)$.

b) Determinați sinusul unghiului VPM, unde punctul M este piciorul perpendicularei din vârful piramidei pe latura BC.

Scanned with OKEN Scanner

9. Paralelipipedul dreptunghic $ABCDA'B'C'D'$ are muchiile de lungimi $AB = 2a$, $BC = AA' = a$. Notăm cu M, N, P şi Q mijloacele segmentelor AB, CD, $C'D'$, respectiv $A'B'$.

a) Demonstraţi că dreapta $D'N$ este perpendiculară pe planul $(B'MN)$.

b) Determinaţi măsura unghiului dintre planele (NQD') şi $(B'MN)$.

10. Fie trapezul $ABCD$ şi dreptunghiul $BDEF$ situate în plane perpendiculare. Dacă $AB = 2DC$, $BD = 12$ cm, $AC \cap BD = \{O\}$ şi $m(\widehat{AOD}) = 60°$ să se determine lungimea proiecţiei segmentului $[EF]$ pe dreapta AC.

11. Fie $ABCD$ un dreptunghi cu $AB = 16$ cm, $AD = 12$ cm, $AE \perp BD$, $E \in (DC)$. Pe planul dreptunghiului se ridică în E perpendiculara pe care se ia punctul F, astfel încât $FE = 5{,}4$ cm.

a) Determinaţi măsura unghiului format de planele (FBD) şi (ABC);

b) Determinaţi distanţa de la punctul A la planul (FBE).

12. Fie $ABCA'B'C'$ o prismă triunghiulară regulată în care $AB = 2$ cm şi $AA' = 3$ cm.

a) Dacă $M \in (CC')$, determinaţi CM maxim astfel încât $\Delta AMB'$ să fie dreptunghic în M.

b) Dacă $N \in (BB')$ astfel încât $BN = 1$ cm, determinaţi cosinusul unghiului dintre planele (ANC) şi (ABC).

13. Fie triunghiul isoscel ABC, $AB = AC = 13$ cm, $BC = 10$ cm şi $AM \perp (ABC)$, cu $AM = 12\sqrt{3}$ cm. Aflaţi:

a) distanţa de la punctul M la dreapta BC;

b) distanţa de la punctul A la planul (MBC);

c) măsura unghiului diedru format de planele (MBC) şi (ABC).

14. Fie $ABCD$ un trapez în care $AB \parallel CD$ şi $AB + CD = AD$. Pe planul trapezului se ridică perpendiculara în punctul A pe care se ia punctul M. Fie N mijlocul segmentului BC. Să se arate că $MN \perp DN$.

15. Fie cubul $ABCDA'B'C'D'$ în care notăm cu Q centrul pătratului $BCC'B'$. Notăm cu P mijlocul lui $[AB]$ şi cu M piciorul perpendicularei dusă din D pe CP. Demonstraţi că $QM \perp PC$.

16. Fie $ABCD$ un dreptunghi cu $AB = 6$ cm şi $BC = 3\sqrt{2}$ cm, iar P este mijlocul laturii AB. În punctul P se ridică perpendiculara MP pe planul dreptunghiului, $MP = 3\sqrt{3}$ cm. Se cere:

a) măsura unghiului format de dreapta MC cu planul dreptunghiului;

b) unghiul format de dreptele MC şi BD.

17. Fie rombul $ABCD$, $AB = a$, $AC = a\sqrt{3}$ şi $VD \perp (ABCD)$, cu $VD = a$. Fie M şi N mijloacele segmentelor (VD), respectiv (CD) şi $AC \cap BD = \{O\}$.

a) Arătaţi că $MO \parallel (VBC)$.

b) Arătaţi că $BN \perp (VCD)$.

c) Determinaţi $d(A, (BMN))$.

Scanned with OKEN Scanner

18. Paralelogramul $ABCD$ şi pătratul $CDMN$ sunt situate în plane perpendiculare. Se ştie că $m(\sphericalangle ABC) = 60°$, $AB = 3$ cm şi $AD = 6$ cm. Calculaţi distanţa de la punctul A la dreapta MN.

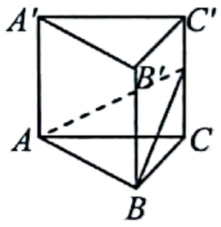
19. În paralelogramul $ABCD$ măsurile unghiurilor $\hat{B}$ şi $\hat{C}$ sunt în raportul 1:2. Mediana CM a ΔABC ($M \in (AB)$) are lungimea k şi este bisectoarea $\widehat{BCD}$. Diagonala AC intersectează MD în P. Găsiţi perimetrul paralelogramului $ABCD$ şi raportul $\frac{MP}{PD}$. Demonstraţi că $DM + AC > 3k$.

20. Fie tetraedrul $ABCD$ în care $m(\sphericalangle BAC) = m(\sphericalangle ABD) = 90°$, $AD \perp BC$, $AC = 3$ cm şi $AB = \sqrt{3}$ cm. Demonstraţi că $m(\widehat{(DBC), (ABC)}) = 60°$ dacă şi numai dacă $BD = \frac{\sqrt{7}}{2}$ cm.

21. În cubul $ABCDA'B'C'D'$ fie punctele M, S, T mijloacele segmentelor (CC'), (BM) şi respectiv (AS). Dacă $A'T \cap (ABC) = \{P\}$ şi $PT = \frac{\sqrt{69}}{14}$ cm, atunci determinaţi lungimea segmentului (AB).

22. Se dă prisma triunghiulară regulată $ABCA'B'C'$ în care $AB = 6$ cm şi $AA' = 3\sqrt{3}$ cm.
a) Calculaţi distanţa de la punctul B la planul $(AB'C')$;
b) Arătaţi că planele $(AB'C')$ şi $(A'BC)$ sunt perpendiculare.

23. În figura alăturată se află o prismă triunghiulară dreaptă $ABCA'B'C'$ care are toate muchiile congruente. Punctul M este mijlocul muchiei CC'. Calculaţi măsura unghiului dintre planele (MAB) şi (ABC).



Scanned with OKEN Scanner

CAPITOLUL 4

Variante de subiecte pentru teză

Scanned with OKEN Scanner

CAPITOLUL 4

Variante de subiecte pentru teză

Varianta 1

1. La următoarele exerciții scrieți răspunsurile pe spațiile punctate:

a) Rezultatul calculului $\left(2-\frac{4}{3}\right)^2 : \frac{2}{9}$ este egal cu .... .

b) Dacă produsul numerelor întregi din intervalul $[2,a)$, unde $a \in \mathbb{N}$ este 24, atunci valoarea numărului a este egală cu .... .

c) Rezultatul calculului $6\sqrt{18}+12\sqrt{8}-11\sqrt{32}$ este egal cu ....

2. Efectuați $\left(\sqrt{5\frac{1}{3}}-\sqrt{16\frac{1}{3}}\right)^{-2} : \left(\frac{7}{\sqrt{11}-2}+\frac{5}{2+\sqrt{11}}\right)^{-2}$.

3. În tetraedrul $ABCD$, se notează cu G_1, G_2, G_3, G_4 centrele de greutate ale triunghiurilor BCD, DAC, ABD, respectiv ABC.

a) Demonstrați că $(G_1G_2G_3) \parallel (ABC)$.

b) Aflați raportul dintre ariile triunghiurilor $G_1G_2G_3$ și ABC.

4. Se dau punctele necoplanare A, B, C, D, cu $AB = AC$ și punctele $E \in (AB)$, $F \in (AC)$ astfel încât $AE = CF$. Să se arate că dreapta determinată de mijloacele segmentelor (AD) și (EF) este paralelă cu planul (BCD).

Varianta 2

1. La următoarele exerciții scrieți răspunsurile pe spațiile punctate:

a) Cel mai mic număr întreg mai mare decât $-\frac{12}{\sqrt{3}}$ este egal cu ... .

b) Rezultatul calculului $|3-\sqrt{11}|-\sqrt{11}$ este egal cu ... .

c) Raționalizând numitorul fracției $\frac{7}{4-2\sqrt{5}}$ obținem ... .

2. Determinați valorile lui x din intervalul $(-6,6)$ pentru care $\frac{x+2}{3} \in \mathbb{Z}$.

3. Se consideră cubul $ABCDA'B'C'D'$. Un plan α paralel cu planul (BCC') intersectează muchiile $[AB]$, $[CD]$, $[C'D']$, $[A'B']$ în punctele E, F, G, H. Să se determine valoarea raportului $\frac{AE}{EB}$, știind că $\frac{DH}{CH}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

4. Fie A, B, C, D patru puncte necoplanare și G centrul de greutate al triunghiului BCD. Se consideră un punct $M \in (AG)$ și se notează $\{P\} = AB \cap (CDM)$,

Scanned with OKEN Scanner

$\{Q\} = AC \cap (BDM)$ şi $\{R\} = AD \cap (BDM)$.

a) Arătaţi că $\frac{AM}{GM} = 3 \cdot \frac{AR}{DR}$. *b)* Demonstraţi că $(PQR) \parallel (BCD)$.

Varianta 3

1. La următoarele exerciţii scrieţi răspunsurile pe spaţiile punctate:

a) Rezultatul calculului $\frac{1}{2} + 1,(2)$ este egal cu ....

b) Arătaţi că $|x-1| + |x+2| = 3$, pentru orice $x \in [-2,1]$.

c) Aflaţi numărul real $x \in [-2,1]$ pentru care $\frac{|x|}{|x-1|+|x+2|} = 0,(4)$.

2. Fie $A = \left(\frac{3}{2\sqrt{3}-\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} - \frac{2}{3\sqrt{3}+2\sqrt{5}} \right) : (\sqrt{5}-\sqrt{3})$.

a) Arătaţi că $A = 0,5$.

b) Calculaţi $\left(A + \frac{1}{2}\right)^{2012} + \left(A + \frac{1}{2}\right)^{-2011}$.

3. În cubul $ABCDA'B'C'D'$, cu $AB = 8$ cm, fie M, P, Q mijloacele muchiilor $[BC]$, $[D'C']$, $[AD]$ şi $A'C' \cap B'D' = \{O\}$.

a) Arătaţi că $(DPM) \parallel (OQB)$.

b) Determinaţi valoarea sinusului unghiului dintre dreptele BQ şi $D'C'$.

c) Determinaţi distanţa dintre planele (DPM) şi (OQB).

4. Într-un tetraedru $ABCD$ cu toate muchiile egale cu 6 cm, fie $DO \perp (ABC)$, $O \in (ABC)$ şi punctul M mijlocul segmentului $[AD]$. Determinaţi valoarea cosinusului unghiului dintre dreptele OM şi CD.

Varianta 4

1. La următoarele exerciţii scrieţi răspunsurile pe spaţiile punctate:

a) Dintre numerele 3,37; 3,(37) şi 3,3(7) cel mai mare este egal cu ... .

b) Dacă $A = \left\{5; \frac{4}{2}; \sqrt{3}; -\sqrt{4}; 6; 8\right\}$, atunci $A \cap \mathbb{Z} = ...$ şi $A \cap \mathbb{Q} = ...$.

c) În intervalul $[-3,3)$ se află un număr de ... numere întregi.

d) Numărul raţional $\frac{21}{5}$ scris sub formă zecimală este egal cu ....

2. *a)* Arătaţi că numărul $A = \frac{4+3\sqrt{2}}{2}$ se află în intervalul $(4,3\sqrt{2})$.

b) Daţi exemplu de 2010 numere raţionale aflate în intervalul $(4,3\sqrt{2})$.

3. Prisma dreaptă $ABCA'B'C'$ are ca baze triunghiurile echilaterale ABC şi $A'B'C'$, lungimea înălţimii AA' de 4 cm, punctul G este centrul de greutate al triunghiului $A'B'C'$ şi $AG = 2\sqrt{7}$ cm.

Scanned with OKEN Scanner

a) Arătați că $AB = 6$ cm.

b) Fie punctul P mijlocul segmentului $[B'C']$. Demonstrați că dreapta AC' este paralelă cu planul $(A'BP)$.

4. Fie triunghiul oarecare ABC și $BD \perp (ABC)$, $D \in (ABC)$. Punctele S și T sunt proiecțiile lui A pe dreptele BC și CD. Demonstrați că $(AST) \perp (ACD)$.

Varianta 5

1. La următoarele exerciții scrieți răspunsurile pe spațiile punctate:

a) Rezultatul calculului $|3-3\sqrt{3}|$ este egal cu ... .

b) Fie $A=\left\{x \in \mathbb{N} \,\middle|\, \sqrt{22} < x < \sqrt{222}\right\}$. Probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea A, acesta să fie număr prim este egală cu ....

c) Rezultatul calculului $3\sqrt{2}-8\sqrt{6}:(2\sqrt{3})$ este egal cu ....

2. Fie raportul $F(x)=\dfrac{x^3+x^2-9x-9}{x^3-9x}$, unde $x \in \mathbb{R}\setminus\{-3,0,3\}$.

a) Arătați că $F(x)=\dfrac{x+1}{x}$, pentru orice $x \in \mathbb{R}\setminus\{-3,0,3\}$.

b) Determinați numerele reale a pentru care $F(a) = a+1$.

c) Calculați $S = F(6)+F(12)+F(20)+F(30)+F(42)+F(56)$.

3. Prisma dreaptă $ABCA'B'C'$ are ca baze triunghiurile echilaterale ABC și $A'B'C$, punctul G este centrul de greutate al triunghiului $A'B'C'$ și $B'C \cap BC' = \{O\}$. Aflați valoarea tangentei unghiului dintre dreptele BB' și OG.

4. În vârful A al pătratului $ABCD$ se ridică perpendiculara MA pe planul pătratului. Știind că $MA = AB = 4$ cm, atunci:

a) determinați valoarea cosinusului unghiului planelor (MAB) și (MDC).

b) demonstrați că $(MBC) \perp (MAB)$.

c) determinați distanța de la punctul B la planul (MAD).

Varianta 6

1. La următoarele exerciții scrieți răspunsurile pe spațiile punctate:

a) Dintre numerele $\dfrac{5}{3\sqrt{2}}$ și $\dfrac{7}{2\sqrt{3}}$ mai mare este numărul ... .

b) Rezultatul calculului $\sqrt{5^2-4^2}\cdot\sqrt{5^2\cdot 4^2}$ este egal cu ... .

c) Calculați $|0,4-1|+|0,4+2|$.

2. Fie numerele reale $a=\sqrt{7}-\sqrt{2}$ și $b=\sqrt{7}+\sqrt{2}$.

a) Arătați că numărul $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}$ aparține intervalului $\left(\dfrac{4}{5},\dfrac{6}{5}\right)$;

b) determinați media aritmetică a numerelor a și b;

c) calculați valoarea numărului $(a-b)^2$.

Scanned with OKEN Scanner

3. În centrul O al triunghiului echilateral ABC de latură 4 cm se ridică perpendiculara OD pe planul triunghiului. Punctele M şi N sunt mijloacele laturilor $[AB]$ şi $[AC]$. Dacă $m\left(\widehat{(DMN),(ABC)}\right)=30°$, calculaţi distanţa de la punctul O la dreapta AD.

4. Fie triunghiul isoscel ABC cu $m(\sphericalangle A)=120°$. Pe planul triunghiului ABC se ridică perpendiculara DA, cu $DA=AB=AC=6$ cm. Se notează cu M mijlocul segmentului $[BC]$.

a) Arătaţi că $DM=3\sqrt{5}$ cm.

b) Calculaţi distanţa de la punctul C la planul (ABD).

c) Determinaţi $\cos\left(\widehat{AM,CD}\right)$.

Varianta 7

1. La următoarele exerciţii scrieţi răspunsurile pe spaţiile punctate:

a) Dacă $x+\frac{1}{x}=6$, atunci valoarea expresiei $x^2+\frac{1}{x^2}$ este egală cu ... .

b) Dacă $2x^2+x-6=(x+a)(2x-b)$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$, atunci valoarea sumei $a+b$ este egală cu ... .

c) Fie expresia $E(x)=x^2+5x-6+(x+2)(x-3)$. Valoarea expresiei pentru $x=2$ este egală cu ... .

d) Media aritmetică a numerelor $a=-2x+3y-4z$ şi $b=4x-5y+6z$ este egală cu ... .

2. Fie expresia $E(x)=\frac{7x-3x^2}{1-9x^2}-\frac{3x}{1-2x-3x^2}\cdot\left(1+\frac{3x+x^2}{x+3}\right)$, $x\in\mathbb{R}\setminus\left\{\pm\frac{1}{3},-1,3\right\}$.

a) Arătaţi că $(x+1)(1-3x)=1-2x-3x^2$.

b) Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $1-9x^2=0$.

c) Arătaţi că $E(x)=\frac{4x}{3x+1}$.

3. *a)* Simplificaţi raportul $\frac{x}{x^2-x}$, unde $x\in\mathbb{R}\setminus\{0,1\}$.

b) Descompunând în factori, arătaţi că $2+x-2x^2-x^3=(x+1)(x+2)(1-x)$.

c) Fie expresia $E(x)=\left(\frac{x}{x^2-x}+\frac{x+2}{2+x-2x^2-x^3}+\frac{x^2}{x^2+x}\right)\cdot\left(x-\frac{1}{x}\right)$, unde $x\in\mathbb{R}\setminus\{-2,-1,0,1\}$. Arătaţi că $E(x)=x$.

d) Arătaţi că $n=E(2)+E(2^2)+E(2^3)+...+E(2^{100})$ este divizibil cu 15.

4. Pătratul $ABCD$ şi triunghiul echilateral EBC sunt incluse în plane diferite. Determinaţi tangenta unghiului format de planele (ABC) şi (EBC), ştiind că unghiul format de dreapta EC cu planul (ABC) are măsura de 30°.

Scanned with OKEN Scanner

Varianta 8

1. La următoarele exerciții scrieți răspunsurile pe spațiile punctate:

a) Dintre numerele $a=(\sqrt{3}-1)^2$ și $b=5-2\sqrt{3}$, mai mare este ... .

b) Dacă $x^2+y^2=5$ și $xy=2$, valoarea expresiei $(x-y)^2$ este egală cu ... .

c) Simplificând expresia $\dfrac{(4x-5)^2-9}{(4x-3)^2-25}$ cu $8x-16$, $x\in\mathbb{R}\setminus\left\{-\dfrac{1}{2};2\right\}$, obținem ...

d) Dacă $2^x+2^{x+1}+2^{x+2}=14$, atunci x este egal cu ....

2. Fie $E(x)=\dfrac{x}{x^3+x^2}:\dfrac{(x+2)(2x-1)-x(x+3)+1}{(2x+2)(3x-3)}$, $x\in\mathbb{R}\setminus\{-1,0,1\}$.

a) Arătați că $E(x)=\dfrac{6}{x(x+1)}$.

b) Calculați $E(2)+E(3)+...+E(2011)$.

3. Arătați că $\dfrac{x+1}{x^2+1}:\left(\dfrac{x+3}{4x-4}-\dfrac{1}{x-1}\right)\cdot\left(1-\dfrac{1}{x+1}\right)=\dfrac{4x}{x^2+1}$, $\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$.

4. În tetraedrul $VABC$, punctul M este mijlocul muchiei $[AB]$, $VA=VB=VC=6\sqrt{2}$, $AB=BC=CA$ și $m(\sphericalangle AVB)=90°$.

a) Arătați că $AB=12$ cm.

b) Calculați măsura unghiului dintre planele (VMC) și (VAB).

c) Determinați distanța de la punctul M la planul (VBC).

Varianta 9

1. La următoarele exerciții scrieți răspunsurile pe spațiile punctate:

a) Media aritmetică a numerelor $17x^2y^2$ și $15x^2y^2$ este egală cu ....

b) Media geometrică a numerelor $5\sqrt{3}-3\sqrt{5}$ și $3\sqrt{5}+5\sqrt{3}$ este egală cu ....

c) Rezultatul calculului $\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}-2\right)^2$ este egal cu ....

2. Se consideră numerele reale $a=\sqrt{3+2\sqrt{2}}$ și $b=\sqrt{3-2\sqrt{2}}$

a) Arătați că $a\cdot b=1$.

b) Arătați că $a^2-2ab+b^2=4$.

c) Demonstrați că $\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b}\in\mathbb{Q}$.

3. Fie $E(x)=\dfrac{x}{x+2}:\dfrac{1}{x^2+3x+2}+\left[\dfrac{2(x^2-2)}{(x\sqrt{2}-2)(x\sqrt{2}+2)}\right]^{-1}$, $x\in\mathbb{R}\setminus\{-2,-1,\pm\sqrt{2}\}$.

a) Arătați că $E(x)=x^2+x+1$, pentru orice $x\in\mathbb{R}\setminus\{-2,-1,\pm\sqrt{2}\}$.

b) Demonstrați că $E\left(1-\sqrt{2}\right)<1$.

c) Arătați că $E(x)>0$, pentru orice $x\in\mathbb{R}\setminus\{-2,-1,\pm\sqrt{2}\}$.

Scanned with OKEN Scanner

4. Fie prisma dreaptă $ABCA'B'C'$ cu bazele ABC şi $A'B'C'$ triunghiuri echilaterale. Dacă M este mijlocul muchiei CC', $AB=6$ cm şi $AA'=4$ cm, atunci:

a) Determinaţi distanţa de la punctul M la dreapta AB.

b) Aflaţi lungimea proiecţiei segmentului $[MB]$ pe planul (ACC').

c) Calculaţi valoarea tangentei unghiului dintre planele (MAB) şi (ABC).

Varianta 10

1. La următoarele exerciţii scrieţi răspunsurile pe spaţiile punctate:

a) Rezultatul calculului $(x+5)(x-5)-(x-7)^2$ este egal cu ....

b) Valoarea de adevăr a propoziţiei "$x^2-7x+6=(x+1)(x+6)$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$" este ....

c) Dintre numerele $\sqrt{5}+2\sqrt{3}$ şi $\sqrt{7}+\sqrt{10}$ mai mare este ....

2. Arătaţi că $\left(\frac{5}{x-2}+\frac{2}{x+2}-\frac{6}{x^2-4}\right):\left(\frac{x^2+4}{x^2-4}+1\right)=\frac{7}{2x}$, pentru orice număr real $x\in\mathbb{R}\setminus\{\pm 2,0\}$.

3. Fie expresia $E(x)=\left(\frac{1}{x-3}+\frac{7-x^2}{x-1}\cdot\frac{1}{x-3}\right):\frac{x+2}{2(x-1)}$.

a) Determinaţi valorile numărului real x pentru care expresia este definită.

b) Arătaţi că $E(x)=x+2$, pentru orice număr real x pentru care $E(x)$ are sens.

c) Determinaţi valorile lui x pentru care $E(x)+2\sqrt{6}=\frac{1}{E(x)-2\sqrt{6}}$.

d) Determinaţi valorile numărului real a pentru care $1-E(a\sqrt{2})<\sqrt{2}-E(a)$.

4. Fie cubul $ABCDA'B'C'D'$, cu $AB=6$ cm. Notăm cu M mijlocul muchiei $[AA']$ şi fie $\{O\}=BC'\cap B'C$. Determinaţi valoarea tangentei unghiului dintre planele (MDO) şi (ABC).

Scanned with OKEN Scanner

CAPITOLUL 1

Numere reale

1.1. Mulțimi de numere reale: $\mathbb{N}\subset\mathbb{Z}\subset\mathbb{Q}\subset\mathbb{R}$

1. Adevărate: *a), b), d), e), f), h).* **4.** *a), d), e), f).* **5.** *a)* $\frac{47}{10}$; *b)* $\frac{176}{9}$; *c)* $\frac{48}{90}$; *d)* $\frac{525}{100}$; *e)* $\frac{3209}{99}$; *f)* $\frac{11984}{9900}$. **6.** *a)* $\frac{53}{10}$; *b)* $\frac{701}{1000}$; *c)* $\frac{12549}{100}$; *d)* $\frac{286}{45}$; *e)* $\frac{22}{9}$; *f)* $\frac{13577}{990}$. **7.** *a)* 0,7; *b)* 0,52; *c)* 0,(5); *d)* 5,8; *e)* 0,55; *f)* 2,1(6). **8.** *a)* 3,4; *b)* 2; *c)* 4,5(7); *d)* 3,45; *e)* 7; *f)* 3,(09); *g)* 0,344; *h)* 0,08; *i)* 0,12(7). **9.** *a)* 1,8; *b)* 0,(45); *c)* 9,(18); *d)* 3,5; *e)* 0,(6); *f)* 1,(378). **10.** *a)* $a=34, b=65$; *b)* $a=3; b=5$; *c)* $a=1; b=77$; *d)* $a=17; b=3$; *e)* $a=5; b=103$; *f)* $a=3; b=5$. **11.** *a)* $\frac{4}{5}$; *b)* $\frac{-37}{11}$; *c)* $\frac{-44}{13}$; *d)* $\frac{927}{990}$; *e)* $\frac{34}{9}$; *f)* $\frac{-13}{6}$. **12.** *a)* $n>6$, de exemplu $n\in\{7,8,12\}$; *b)* $n\nmid 2$ și $n\nmid 3$, de exemplu $n\in\{7;13;77\}$; *c)* $n\vdots 2$ sau $n\vdots 3$, de exemplu $n\in\{2;9;14\}$; *d)* După aducerea la forma ireductibilă, numitorul fracției nu trebuie să aibă alți divizori primi diferiți de 2 și 5, de exemplu $n\in\{4;10;20\}$; *e)* În forma ireductibilă, numitorul fracției trebuie să nu aibă ca divizori primi pe 2 sau pe 5, de exemplu $n\in\{7;9;22\}$; *f)* În forma ireductibilă, numitorul fracției trebuie să aibă cel puțin un divizor prim dintre 2 și 5, dar să aibă și cel puțin un divizor prim diferit de 2 și 5, de exemplu $n\in\{35;44;90\}$. **13.** *a)* $\frac{47}{25}$; *b)* $\frac{41}{78}$; *c)* Simplificăm mai întâi cu 10001, apoi cu 7 și obținem $\frac{710}{351}$. **14.** *a)* A; *b)* F; *c)* A; *d)* F; *e)* A; *f)* F. **15.** *a)* $1+7+4$; *b)* $15+(-3)$; *c)* $2-(-10)$; *d)* $\frac{9}{2}\cdot\frac{8}{3}$; *e)* $\sqrt{8}\cdot\sqrt{18}$; *f)* $(12-\sqrt{2})+\sqrt{2}$. **17.** *a)* $n\in\{2,3,8,15\}$; *b)* $n\in\{0,-1,-4\}$; *c)* $n\in\{0,1,6\}$; *d)* $n\in\{-1,0\}$; *e)* $n\in\{0,1\}$; *f)* $n\in\{-4,-1,1\}$. **18.** *a)* Indicație: Aducem la același numitor, nu neapărat cel mai mic: $\frac{1}{7}=\frac{60}{420}$ și $\frac{1}{6}=\frac{70}{420}$; *b)* Indicație: Prin împărțire obținem că $\frac{1}{7}<0{,}143$ și $\frac{1}{6}>0{,}165$ astfel că putem scrie oricare fracții zecimale periodice cuprinse între 0,143 și 0,165; *c)* Aceeași indicație ca la *b*.

19. $\overline{xxxx}_{(3)}=x\cdot 3^3+x\cdot 3^2+x\cdot 3+x=40x$, $\overline{yy}_{(9)}=y\cdot 9+y=10y$. Rezultă că $y=4x$, cu $x\in\{1,2\}$ și $y\in\{1,2,\ldots,8\}\Rightarrow x=1, y=4$ sau $x=2, y=8$. **20.** *a)* 0, 8, respectiv 5; *b)* 0, 8 respectiv 5. **21.** $a=[12,5,36]=180$. **22.** *a)* Fracția este reductibilă prin $d\in\mathbb{N}$, $d\geq 2$ dacă și numai dacă d divide $n-2$ și $3n-2\Leftrightarrow d\mid 3(n-3)-(3n-2)\Leftrightarrow d\mid 7\Leftrightarrow d=7$. Rezultă $n\in\{7k+3\mid k\in\mathbb{N}\}$; *b)* Numerele sunt $7\cdot 0+3$, $7\cdot 1+3$, ..., $7\cdot 2010+3$. Suma lor este 14153418.

23. *a)* $2n+3=7k\Rightarrow 2n=7k-3\Rightarrow k=2h+1$, $h\in\mathbb{N}\Rightarrow n=7h+2$; *b)* Dacă fracția se reduce prin numărul natural prim d, atunci $d\mid 5\cdot(3n+2)-2\cdot(5n+8)$, adică $d\mid 14$, deci $d=2$ sau $d=7$. Obținem $n=$ par sau $n=7k+4$, $k\in\mathbb{N}$; *c)* Dacă fracția se reduce prin numărul prim d, atunci ținând seama că $n^2-3n+1=(n+1)(n-4)+5$, rezultă că $d=5$. Atunci $n=5k-1$, sau altfel scris, $n=5h+4$ unde $h\in\mathbb{N}$. **24.** $a=\frac{10^k-1}{9}+\frac{n(n+1)}{2}$. Pentru orice

Scanned with OKEN Scanner

$k\in\mathbb{N}$ avem $10^k-1\vdots 9$ şi pentru orice $n\in\mathbb{N}$ avem $n(n+1)\vdots 2$ deci $a\in\mathbb{N}$ pentru orice $n\in\mathbb{N}$ şi $k\in\mathbb{N}$. **26.** $\sqrt{A}\in\mathbb{Q}\Leftrightarrow A$ este pătrat perfect. ***a)*** $A=50$ nu e pătrat perfect; ***b)*** A nu e pătrat perfect deoarece ultima sa cifră este 8; ***c)*** $A=100^2$; ***d)*** $A=199\cdot 201$ nu e pătrat perfect. **27.** ***a)*** $x+1|8\Leftrightarrow x\in\{0,1,3,7\}$; ***b)*** $2x+1|21\Leftrightarrow x\in\{-11,-4,-2,-1,0,1,3,10\}$; ***c)*** $5\le|x|\le 10$; ***d)*** $x\in\{4,5,6\}$. **28.** ***a)*** $a\in\{1,4,7\}$; ***b)*** $a=5$; ***c)*** $b=0$, $a\in\{1,4,7\}$ sau $b=5$, $a\in\{2,5,8\}$; ***d)*** $\overline{3b}\vdots 4\Rightarrow b=2$ sau $b=6$. Pentru $b=2$ trebuie să avem $a=2$ iar pentru $b=6$ trebuie $a=7$; ***e)*** $b=0$, $a=7$ sau $b=5$, $a=9$; ***f)*** Deoarece $\overline{99abc}=198\cdot 500+\overline{abc}$, rezultă că $\overline{abc}\vdots 198$, deci $\overline{abc}=198\cdot k$, unde $k\in\{0,1,2,3,4,5\}$. **29.** ***a)*** $a=\frac{3}{5}$, $k\cdot a\in M\cap\mathbb{N}\Rightarrow$ $k\vdots 5\Rightarrow k\in\{5,10,15,...,45\}$. Sunt 9 elemente; ***b)*** $\frac{1}{5}$. **30.** ***a)*** Fals, $\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}=2$; ***b)*** Adevărat. Presupunând contrariul, ar exista a,b,c astfel încât $a+b=c$, cu a şi c raţionale şi b iraţional. Atunci $b=c-a\in\mathbb{Q}$, contradicţie; ***c)*** Adevărat. Presupunând $a\cdot b=c$ cu a iraţional şi b şi c raţionale ar rezulta $a=\frac{c}{b}\in\mathbb{Q}$, contradicţie; ***d)*** Adevărat, de exemplu $\sqrt{2}-\sqrt{2}=0\in\mathbb{Q}$; ***e)*** Fals, $\pi^2\notin\mathbb{Q}$; ***f)*** Adevărat, $a^0=1\in\mathbb{N}$. **31.** ***a)*** Numărul format din ultimele 3 cifre este egal cu restul împărţirii la 1000 a numărului considerat. Cum $1000\vdots 8$, rezultă concluzia; ***b)*** $\overline{abc}-(4a+2b+c)=96a+8b\vdots 8$. **32.** ***a)*** Dacă a ar fi raţional atunci ar trebui ca scrierea sa ca fracţie zecimală să fie periodică. Dacă presupunem că lungimea perioadei este p, luând $n=10^p$, obţinem contradicţie; ***b)*** în secvenţa $122333...\underbrace{99...9}_{9\text{ ori}}$ sunt 45 de cifre. Mai departe urmează secvenţa $\underbrace{1010...10}_{de10\text{ ori }10}$ formată din 20 de cifre, secvenţa $\underbrace{1111...11}_{de11\text{ ori }11}$ formată din 22 de cifre şi secvenţa $\underbrace{1212...12}_{de12\text{ ori }12}$. A 100-a zecimală a numărului a este a 13-a cifră a acestei secvenţe, adică este cifra 1. **33.** ***a)*** $\overline{24x}=60\cdot k^2\Rightarrow x=0$; ***b)*** $\overline{17x}=11\cdot k^2\Rightarrow k=4$ şi $x=6$; ***c)*** $\overline{2x9x}\vdots 18\Rightarrow x=8$, dar $\sqrt{\frac{2898}{18}}=\sqrt{161}\notin\mathbb{N}$. Problema nu are soluţie;

d) $\sqrt{\frac{\overline{28x}}{18}}=\frac{1}{6}\cdot\sqrt{2\cdot\overline{28x}}$, deci $560\le 2\cdot\overline{28x}=p^2\le 578$. Rezultă că $p=24$ şi $x=8$;

e) $\sqrt{\frac{\overline{7x}}{12}}=\frac{1}{6}\cdot\sqrt{3\cdot\overline{7x}}\in\mathbb{Q}$, $x=5$; ***f)*** $x\in\{0,1,2,...9\}$.

34. ***a)*** Presupunând contrariul, $2+\sqrt{3}=a\in\mathbb{Q}$ ar rezulta $\sqrt{3}=a-2\in\mathbb{Q}$, fals; ***b)*** $\frac{2}{\sqrt{3}}+\sqrt{3}=\frac{5}{3}\cdot\sqrt{3}\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$; ***c)*** Dacă $\sqrt{3}+\sqrt{2}$ ar fi raţional, atunci şi pătratul său ar fi raţional, $\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^2=5+2\sqrt{6}\notin\mathbb{Q}$; ***d)*** $\left(\sqrt{7}-\sqrt{5}\right)^2=12-2\sqrt{35}\notin\mathbb{Q}$; ***e)*** $\left(2\sqrt{5}+5\sqrt{2}\right)^2=70+20\sqrt{10}\notin\mathbb{Q}$. **35.** Pentru $a\in\mathbb{N}$, dacă a are ultima cifră 2,3,7 sau 8 atunci a^2 nu este pătrat perfect, astfel că $\sqrt{a}$ nu este raţional. ***a)*** $u\left(1\cdot 2\cdot....\cdot 9+8\right)=8$; ***b)*** $u\left(5n+2\right)=2$ sau 7; ***c)*** $4n+2\vdots 2$ dar $4n+2\not\vdots 2^2$, ca urmare $4n+2$ nu este pătrat perfect. **36.** Fie $a=\frac{p}{q}$, $p\in\mathbb{Z}$, $q\in\mathbb{N}^*$, $(p,q)=1$. Din $7a\in\mathbb{Z}$ şi $3a\in\mathbb{Z}$ rezultă $q|7$ şi $q|3$, ceea ce implică $q=1$, adică

Scanned with OKEN Scanner

$a\in\mathbb{Z}$. **37.** Fie $\sqrt{n}=\frac{p}{q}$, $p\in\mathbb{Z}$, $q\in\mathbb{N}^*$, $(p,q)=1$. Rezultă că $p^2=n\cdot q^2$ adică $q\mid p^2$. Ţinând seama de condiţia $(p,q)=1$, obţinem $q\mid p$, şi apoi $q=1$. Aşadar $\sqrt{n}=p\in\mathbb{N}$. **38.** Dacă x ar fi raţional atunci ar trebui ca scrierea sa ca fracţie zecimală să fie periodică. Dacă lungimea perioadei ar fi n, cum în perioadă se află cel puţin o cifră de 1, înseamnă că în scrierea zecimală a numărului x nu pot exista mai mult de n cifre de 0 consecutive, în contradicţie cu modul de definire al lui x. **39.** $x(b-d)=c-a$. Dacă $b\neq d$, atunci ar rezulta $x=\frac{c-a}{b-d}\in\mathbb{Q}$, fals. Înseamnă că $b=d$, şi imediat, $c=a$.

1.2. Reprezentarea pe axă a numerelor reale. Compararea numerelor reale

3. *a)* $7>-20$; *b)* $-7<-6$; *c)* $-2>-12$; *d)* $1,2<1,(2)$; *e)* $2,022<2,202$; *f)* $-0,8(98)=-0,(89)$; *g)* $-0,012<-0,0021$; *h)* $-1,023>-1,2034$; *i)* $9,6(969)>9,(69)$. **4.** *a)* $\frac{1}{5}<\frac{3}{2}$; *b)* $-\frac{4}{23}<-\frac{1}{23}$; *c)* $\frac{5}{7}<\frac{11}{7}$; *d)* $-\frac{11}{12}>-\frac{12}{11}$; *e)* $\frac{5}{6}<\frac{6}{7}$; *f)* $\frac{33}{176}>\frac{15}{85}$; *g)* $-3\frac{1}{2}=-3\frac{4}{8}$; *h)* $\frac{8}{5}>\frac{6}{4}$; *i)* $-\frac{5}{4}>-\frac{5}{3}$. **5.** *a)* $-15,4;-3;-\sqrt{5};0;\frac{8}{2};7\frac{1}{2};14$; *b)* $18;9,(7);5\sqrt{3};-0,9;-1;-\sqrt{2};-5,4$. **6.** *a)* $M(3)$, $N(-3)$, $P(1)$; *b)* $MN=8$, $MP=4$; *c)* $PN=PM\Rightarrow P$ este mijlocul segmentului $[MN]$. **7.** *a)* $[8,7]=8$, $\{8,7\}=0,7$; *b)* $[-7,2]=-8$, $\{-7,2\}=0,8$; *c)* $[2,(5)]=2$, $\{2,(5)\}=0,(5)$; *d)* $[-4,(3)]=-5$, $\{-4,(3)\}=0,(6)$; *e)* $\left[\sqrt{13}\right]=3$, $\left\{\sqrt{13}\right\}=\sqrt{13}-3$; *f)* $\left[-\sqrt{5}\right]=-3$, $\left\{-\sqrt{5}\right\}=3-\sqrt{5}$; *g)* $\left[-4+\sqrt{5}\right]=-2$, $\left\{-4+\sqrt{5}\right\}=\sqrt{5}-2$; *h)* $\left[-3+\sqrt{9}\right]=0$, $\left\{-3+\sqrt{9}\right\}=0$; *i)* $\left[\frac{2}{7}\right]=0$, $\left\{\frac{2}{7}\right\}=\frac{2}{7}$; *j)* $\left[-\frac{2}{7}\right]=-1$, $\left\{-\frac{2}{7}\right\}=\frac{5}{7}$; *k)* $\left[4\frac{1}{3}\right]=4$, $\left\{4\frac{1}{3}\right\}=\frac{1}{3}$; *i)* $\left[-3\frac{1}{3}\right]=-4$, $\left\{-3\frac{1}{3}\right\}=\frac{2}{3}$. **8.** *a)* $\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\sqrt{2}-1$, $\sqrt{3}-\sqrt{2}$; *b)* $\sqrt{20}$, $\sqrt{21}$, $3+\sqrt{2}$; *c)* $-\sqrt{5}$, $-\sqrt{6}$, $\sqrt{2}-4$; *d)* $1-\sqrt{2}$, $1-\sqrt{3}$, $\sqrt{2}-2$. **9.** Deoarece $[x]+\{x\}=x$ înseamnă că $[x]+2\{x\}=x+\{x\}$. *a)* 12; *b)* 5,8; *c)* $-3,6$; *d)* $-1,(1)$; *e)* $2\sqrt{3}-1$; *f)* $\frac{19}{5}$; *g)* $-\frac{16}{10}$; *h)* $3,(6)$. **10.** *a)* 12,54; *b)* 12,549; *c)i)* 12,55; *c) ii)* 12,54816; *d)* 12500. **11.** $a=16,7138...$, *a)* 16,7; *b)* 16,713; *c)* 16,8; *d)* 16. **12.** *a)* 27,86; *b)* 27,8537; *c)* 27,85377; *d)* 20. **13.** *a)* -7; *b)* $\frac{2}{10}$; *c)* -18; *d)* 12,5; *e)* 5^2; *f)* $-\sqrt{81}$. **15.** *a)* $A=\{1,2,3,4,6,12\}$; *b)* $B=\{-3,-2,-1,0,1\}$; *c)* $C=\{0,2,4,14\}$; *d)* $D=\{-3,-1,0,2\}$. **16.** *a)* $1<1,2<2$; *b)* $1<1,(2)<2$; *c)* $-5<-4,3<-4$; *d)* $-5<-4,(5)<-4$; *e)* $4<3\sqrt{2}<5$; *f)* $-5<-2\sqrt{5}<-4$; *g)* $\sqrt{2}+\sqrt{50}=6\sqrt{2}$, $8<6\sqrt{2}<9$; *h)* $\sqrt{3}-\sqrt{27}=-2\sqrt{3}$, $-4<-2\sqrt{3}<-3$; *i)* $1<\sqrt{3}<2\Rightarrow 5<4+\sqrt{3}<6$; *j)* $2<\frac{47}{21}<3$; *k)* $3<3\frac{1}{3}<4$; *l)* $-3<-\frac{75}{28}<-2$. **17.** *a)* $2\sqrt{3}<3\sqrt{2}$; *b)* $\sqrt{19}<2\sqrt{5}$; *c)* $6\sqrt{3}<11$; *d)* $-3\sqrt{3}>-4\sqrt{2}$; *e)* $-\sqrt{289}<-3\sqrt{25}$; *f)* $-4\sqrt{15}>-9\sqrt{3}$. **18.** *a)* $\sqrt{3}+\sqrt{75}=6\sqrt{3}>10$; *b)* $2\sqrt{7}=\sqrt{28}$ şi $5\sqrt{3}>2\sqrt{11}\Rightarrow 2\sqrt{7}+5\sqrt{3}>\sqrt{28}+2\sqrt{11}$; *c)* $-6-\left(3-4\sqrt{5}\right)=4\sqrt{5}-9<0\Rightarrow 3-4\sqrt{5}>-6$; *d)* $\sqrt{2}+\sqrt{3}>2\Rightarrow\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{4}>4$; *e)* $8+5\sqrt{2}>8+2\sqrt{5}$; *f)* $\sqrt{8}=2\sqrt{2}\Rightarrow(5-6\sqrt{2})-(-\sqrt{8})=5-4\sqrt{2}<0\Rightarrow 5-6\sqrt{2}<-\sqrt{8}$. **19.** *a)* $2+\sqrt{2}>\sqrt{11}>\sqrt{2}>1,14>0>-\sqrt{3}>-\sqrt{7}$; *b)* $-1,(34)<-\frac{5}{15}<\frac{7}{14}<\frac{13}{6}<\sqrt{5}<5$.

Scanned with OKEN Scanner

20. ***a)*** $18{,}34$; ***b)*** -5 ; ***c)*** 23 ; ***d)*** $4\sqrt{2}-5{,}25$. **21.** ***a)*** $\{-3,-2,-1,0,1,2\}$; ***b)*** $\{1\}$; ***c)*** $\{3,4\}$; ***d)*** $\{...,-4,-3,-2\}$; ***e)*** Pentru $x-3>0$ găsim soluția $x=7$ iar pentru $x-3<0$ relația $\frac{x-3}{6}<\frac{x-3}{3}$ este imposibilă; ***f)*** Pentru $x+2>0$ relația este echivalentă cu $1>\frac{3}{2}>\frac{5}{4}$, care este falsă iar pentru $x+2<0$ relația devine $1<\frac{3}{2}<\frac{5}{4}$, care de asemenea este falsă. Mulțimea este vidă. **22.** ***a)*** $2\sqrt{5}<5<3\sqrt{3}<2\sqrt{7}<\sqrt{30}<4\sqrt{2}$; ***b)*** $2\sqrt{30}<12<7\sqrt{3}<5\sqrt{6}<4\sqrt{10}<9\sqrt{2}$; ***c)*** $31<12\sqrt{7}<15\sqrt{5}<24\sqrt{2}<12\sqrt{30}$; ***d)*** $10\sqrt{2}<15<4\sqrt{15}<9\sqrt{3}<7\sqrt{5}<5\sqrt{10}$; ***e)*** $-3\sqrt{14}<-5\sqrt{5}<-11<-3\sqrt{13}<-4\sqrt{7}$; ***f)*** $-5\sqrt{5}<-6\sqrt{3}<-10<-3\sqrt{11}<-7\sqrt{2}$. **23.** ***a)*** $a=3{,}2$ și $b=2{,}6$; ***b)*** $a=1{,}7$ și $b=-2{,}3$. $\{a\cdot b\}=\{-3{,}91\}=0{,}09$. **24.** ***a)*** Înmulțind cu 3 obținem $3a<2a+b<a+2b<3b$ și apoi $0<b-a<2(b-a)<3(b-a)$, care este evident adevărată dacă împărțim cu $b-a>0$; ***b)***Analog cu *a)*. **25.** ***a)*** Înmulțind inegalitatea $a<b$ cu a, respectiv cu b ; ***b)*** Ca și la punctul anterior, înmulțim cu a^2 , ab , respectiv b^2 ; ***c)*** Analog cu punctele *a)* și *b)*. **26.** ***a)*** Pentru $ab\geq 0$ relația este evident adevărată. Pentru $ab<0$ avem $a^2+ab+b^2=(a+b)^2-ab\geq 0$; ***b)*** Analog. **27.** ***a)*** Avem: $\frac{1}{20}<\frac{1}{10}\leq\frac{1}{10}$, $\frac{1}{20}<\frac{1}{11}<\frac{1}{10}$, ..., $\frac{1}{20}<\frac{1}{19}<\frac{1}{10}$. Prin însumare rezultă concluzia; ***b)*** Analog cu *a)*, fiecare din cei 10 termeni ai sumei este cuprins între $\frac{1}{60}$ și $\frac{1}{50}$; ***c)*** Se folosește identitatea $\frac{1}{k\cdot(k+1)}=\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}$; ***d)*** Se folosește identitatea $\frac{1}{k\cdot(k+2)}=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+2}\right)$; ***e)*** Folosind identitatea menționată la pct. *c)* obținem $\frac{1}{4\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 6}+...+\frac{1}{49\cdot 50}=\frac{1}{4}-\frac{1}{50}=0{,}23$; ***f)*** Se adună inegalitățile $\frac{1}{2\cdot 3}<\frac{1}{2^2}<\frac{1}{1\cdot 2}$, $\frac{1}{3\cdot 4}<\frac{1}{3^2}<\frac{1}{2\cdot 3}$, ..., $\frac{1}{9\cdot 10}<\frac{1}{9^2}<\frac{1}{8\cdot 9}$. **28.** ***a)*** $A=\{3,4,5,6\}$; ***b)*** $B=\{-8,-2,0,6\}$; ***c)*** $C=\left\{1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},2,\frac{2}{3},3,\frac{3}{2}\right\}$; ***d)*** $D=\{-8,-3,-2,-1,0,1,2,7\}$. **29.** ***a)*** $\left(\sqrt{197}\right)^2=197$, $\left(2+\sqrt{3}\right)^2=7+4\sqrt{3}$; ***b)*** Avem $\left(\sqrt{11}+\sqrt{5}\right)^2=16+2\sqrt{55}<16+2\sqrt{64}=32=\left(\sqrt{32}\right)^2$, deci $\sqrt{11}+\sqrt{5}<\sqrt{32}$; ***c)*** Cum $\left(\sqrt{11}+\sqrt{13}\right)^2=24+2\sqrt{143}>24+2\sqrt{95}=\left(\sqrt{19}+\sqrt{5}\right)^2$, rezultă $\sqrt{11}+\sqrt{13}>\sqrt{19}+\sqrt{5}$; ***d)*** $\sqrt{7}+\sqrt{5}>3+\sqrt{3}$; ***e)*** $\sqrt{5}-\sqrt{2}>2-\sqrt{3}$; ***f)*** $\sqrt{15}-\sqrt{13}<\sqrt{14}-3$. **30.** ***a)*** $\sqrt{19+8\sqrt{3}}=4+\sqrt{3}>\sqrt{15}+\sqrt{3}$; ***b)*** $2+\sqrt{3}=\sqrt{7+4\sqrt{3}}$; ***c)*** $3-\sqrt{5}=\sqrt{14-6\sqrt{5}}$; ***d)*** $4-3\sqrt{3}<-\sqrt{7-4\sqrt{3}}$. **32.** ***a)*** Dacă cel puțin unul dintre numerele x și y ar fi mai mare decât 0 atunci ar rezulta $x+y>0$; ***b)*** Dacă ambele numere ar fi diferite de zero atunci ele ar fi strict pozitive și ar rezulta că $x\cdot y>0$. **33.** ***a)*** Se obține direct, prin ridicarea la pătrat în membrul drept; ***b)*** Relația din ipoteză se poate rescrie $x-4\sqrt{x-4}+y-6\sqrt{y-9}\leq 0$. Folosind egalitatea de la punctul *a)* și cea analogă $y-6\sqrt{y-9}=\left(\sqrt{y-9}-3\right)^2$, rezultă că $\left(\sqrt{x-4}-2\right)^2+\left(\sqrt{y-9}-3\right)^2\leq 0$, de unde $\sqrt{x-4}-2=\sqrt{y-9}-3=0$, cu soluția $x=8$ și $y=18$. **34.** ***a)*** Se efectuează ridicările la pătrat în relația de demonstrat; ***b)*** Cu ajutorul pct. *a)* deducem inegalitatea $x^2+y^2+z^2\geq xy+yz+zx$, în care egalitatea are loc pentru $x=y=z$. Aplicând acest rezultat pentru a,b,c , rezultă concluzia. **35.** Prin ridicare la pătrat se obține

Scanned with OKEN Scanner

$ad+bc-2\sqrt{abcd}\geq 0 \Leftrightarrow \left(\sqrt{ad}-\sqrt{bc}\right)^2\geq 0$. Egalitatea are loc pentru $ad=bc$.

36. *a)* $(x+y)^2-4xy\geq 0\Leftrightarrow (x-y)^2\geq 0$; *b)* Se foloseşte relaţia de la punctul *a)*.

37. Deoarece $\sqrt{a^2-2a+2}=\sqrt{(a-1)^2+1}\geq 1$, $\sqrt{4b^2-12b+25}=\sqrt{(2b-3)^2+16}\geq 4$ şi $\sqrt{2c^2-12c+27}=\sqrt{2(c-3)^2+9}\geq 3$, prin adunare se obţine o inegalitate de sens contrar celei din ipoteză. Ca urmare, are loc egalitatea, care se obţine pentru $a=1$, $b=\frac{3}{2}$ şi $c=3$.

38. *a)* $a^2=2n+1+2\sqrt{n^2+n}$ şi $b^2=2n+1+2\sqrt{n^2+n-2}$, deci $a^2>b^2\Rightarrow a>b$.

39. *a)* $2A=4+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+...+\frac{1}{2^9}$; $A=2A-A=3-\frac{1}{2^{10}}\Rightarrow [A]=2$;

b) Pentru $a=1$, $[B]=11$. Pentru $a>1$, avem relaţiile: $aB=a^2+1+\frac{1}{a}+\frac{1}{a^2}+...+\frac{1}{a^9}$;

$aB-B=a^2-a+1-\frac{1}{a^{10}}\Rightarrow B=a+\frac{1}{a-1}\cdot\left(1-\frac{1}{a^{10}}\right)$. Deoarece $a\in\mathbb{N}$ şi $0<\frac{1}{a-1}\cdot\left(1-\frac{1}{a^{10}}\right)<1$, rezultă că $[B]=a$.

40. *a)* $A=1+\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{7}\right)+...+\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{97}-\frac{1}{100}\right)=1+\frac{1}{3}\cdot\left(1-\frac{1}{100}\right)\Rightarrow \{A\}=\frac{33}{100}$; *b)* $B=\frac{1}{4}\cdot\left(1-\frac{1}{101}\right)=\frac{100}{404}\Rightarrow\{B\}=\frac{100}{404}$. **41.** *a)* $a=0+1+1+2+2+...+19+19+20=20^2$; $b=0+1+1+2+2+...+49+49=49\cdot 50$; *b)* Dacă n este par, $n=2k$, atunci putem scrie $S=1+1+2+2+...+(k-1)+(k-1)+k=2\cdot\frac{(k-1)\cdot k}{2}+k=k^2$, care este pătrat perfect, iar dacă n este impar, $n=2k+1$, atunci $S=1+1+2+2+...+k+k=k(k+1)$, care nu este pătrat perfect deoarece este un număr cuprins între două pătrate perfecte consecutive, $k^2<k\cdot(k+1)<(k+1)^2$. **42.** Notând $n=[x]$ avem $n\leq x<n+1$. Egalitatea de demonstrat se probează cu uşurinţă în fiecare din următoarele două situaţii posibile: I) $n\leq x<n+\frac{1}{2}$ şi II) $n+\frac{1}{2}\leq x<n+1$. **43.** *a)* Cum $[10^p\cdot x]\leq 10^p\cdot x<[10^p\cdot x]+1$, prin înmulţire cu 10^{-p} rezultă $x_l\leq x<x_a$; *b)* $x-x_l=10^{-p}\cdot\left(10^p\cdot x-[10^p\cdot x]\right)$ şi $x_a-x=10^{-p}\cdot\left([10^p\cdot x]+1-10^p\cdot x\right)$ Egalitatea din enunţ implică $10^p\cdot x-[10^p\cdot x]=[10^p\cdot x]+1-10^p\cdot x$, de unde concluzia se obţine imediat.

1.3. Modulul unui număr real

1. *a)* 3; *b)* 7; *c)* 6; *d)* 1,(21); *e)* 7,35; *f)* 10; *g)* $\frac{3}{5}$; *h)* $11\frac{3}{8}$; *i)* $\frac{13}{47}$. **2.** *a)* F; *b)* F; *c)* A; *d)* A; *e)* F; *f)* F. **4.** *a)* $x=\pm 8$; *b)* $x=1$; *c)* $x=\frac{11}{3}$; *d)* $x\in\{-2;16\}$; *e)* $x\in\left\{\frac{8}{3};4\right\}$; *f)* $x\in\{-16;6\}$; *g)* $\varnothing$; *h)* $x\in\left\{-2;-\frac{1}{2}\right\}$; *i)* $x\in\{1;5\}$. **5.** *a)* F; *b)* A; *c)* F; *d)* F; *e)* F; *f)* F. **6.** *a)* $x=\pm 73$; *b)* $x=5$; *c)* $x\in\{-6;5\}$; *d)* $x\in\{-2;4\}$; *e)* $x\in\{-4;10\}$; *f)* $x\in\{-16;22\}$. **7.** *a)* $x=7$, $y=-5$; *b)* $x=y$ şi $3x+2y-10=0\Rightarrow x=y=2$; *c)* $x=-\frac{5}{3}$, $y=\frac{3}{5}$; *d)* $x=3$, $y=-\frac{4}{5}$; *e)* $x=-3$, $y=10$; *f)* $y=0$, $x=\frac{13}{5}$. **8.** *a)* $x+5=\pm 11\Rightarrow x\in\{-16;6\}$; *b)* $x\in\{-1;4\}$; *c)* $x\in\{-2;4\}$; *d)* $x\in\{-3;2\}$;

Scanned with OKEN Scanner

e) $x\in\{-9;5\}$; *f)* $x\in\{0;4\}$. **9.** *a)* $-4x-4$; *b)* $2x-1$; *c)* $3x-2$. **10.** *a)* 0; *b)* 4; *c)* 3; *d)* $x^2-x=x(x-1)<0$, $x-1-x^2=x(1-x)-1<0$; Valoarea expresiei este 1. **11.** *a)* $x\in\{-2;8\}$; *b)* $|x-3|-3=\pm5\Rightarrow|x-3|\in\{-2;8\}$. Modulul nu poate fi negativ, deci $|x-3|=8\Rightarrow x\in\{-5;11\}$; *c)* $x\in\{-8;14\}$. **12.** *a)* Fals, pentru că $1-\sqrt{2}<0$; *b)* Adevărat, pentru că $3{,}14<\pi<3{,}16$; *c)* Fals, deoarece $4-3\sqrt{2}<0$; *d)* Adevărat. **13.** *a)* Ambii factori fiind nenegativi, produsul este egal cu 0 dacă cel puţin unul din factori este nul. Rezultă că $x\in\{7;2;-4\}$; *b)* Analog, cum $|x-5|=|2x+3|$ dacă şi numai dacă $x-5=\pm(2x+3)$, obţinem $x\in\left\{-9;-8;\frac{2}{3}\right\}$; *c)* $x\in\{-3;-4;6\}$; *d)* $x\in\left\{-1;\frac{1}{2}\right\}$. **14.** *a)* $|x+5|+|3-x|\geq|(x+5)+(3-x)|$; *b)* Avem $|2x+1|+2\cdot|1-x|=|2x+1|+|2-2x|\geq|2x+1+2-2x|=3$, inegalitatea provenind din $|a|+|b|\geq|a+b|$ pentru $a=2x+1$ şi $b=2-2x$; *c)* $|a|+|b|\geq|a-b|$; *d)* $|a|+|b|\geq|a+b|$; *e)* $2\cdot|2x+3|+|x-5|+|3x-19|\geq|2\cdot(2x+3)-(x-5)-(3x-19)|=30$.

15. *a)* Avem $x^2+1\geq0,\forall x\in\mathbb{R}$. La fel $x^2+2\geq0$ şi apoi $4(x^2+2)+7\geq0,\forall x\in\mathbb{R}$. Astfel, $3-5x^2+(x^2+1)+(4(x^2+2)+7)=19$; *b)* $(\sqrt{3}+2x^2)-x^2-(\sqrt{7}+x^2)-11=\sqrt{3}-\sqrt{7}-11$; *c)* $(x-5)^2+1+5(2x-3)-(x^2+9)=2$; *d)* $(2+3x^2)-(1+x^2)-2x^2=1$. **16.** Pentru $a\geq b$ avem $\max(a,b)=a$ şi $\frac{a+b+|a-b|}{2}=\frac{a+b+(a-b)}{2}=a$. Analog pentru $\min(a,b)$ şi pentru cazul $a<b$.

17. Avem: $\sqrt{3(2y-3)^2+(x-2)^2}=\sqrt{3(x+1-3)^2+(x-2)^2}=\sqrt{4(x-2)^2}=2|x-2|$ şi $\sqrt{x^2+12y^2+2x+1}=\sqrt{3\cdot(2y)^2+(x+1)^2}=\sqrt{3\cdot(x+1)^2+(x+1)^2}=2|x+1|$. Ca urmare, avem $E=3|x+1|+3|x-2|=3(x+1)+3(2-x)=9$. **18.** $x\leq1$ şi $y\leq4\Rightarrow x+y-5\leq0$. Analog $2x+y+5\geq0$, $x-y-4\leq0$ şi $2x-y-5\leq0$. Se obţine $E=11$. **19.** Deoarece $xy\geq-|xy|=-|x||y|>-4$, înseamnă că $4+xy>0$ astfel că relaţia de demonstrat este echivalentă cu $|x+y|<\frac{1}{2}(4+xy)\Leftrightarrow-4-xy<2\cdot(x+y)<4+xy$. Prima inegalitate se rescrie $(x+2)(y+2)>0$, iar cea de a doua $(x-2)(y-2)>0$. Aceste relaţii sunt adevărate deoarece pentru $|x|<2$, $|y|<2$ avem $x+2>0$, $x-2<0$, $y+2>0$, $y-2<0$. **20.** Presupunând prin absurd că $x\neq y$, atunci $|x-y|>0$. Punând $a=|x-y|$ condiţia din enunţ devine $|x-y|<|x-y|$, fals! **21.** *a)* $|x+y|=|x-y|\Rightarrow x+y=\pm(x-y)\Rightarrow y=0$ sau $x=0$, deci $x\cdot y=0$; *b)* Concluzia problemei este echivalentă cu faptul că cel puţin două dintre numerele x, y, z sunt egale cu zero. Folosind *a)*, din $|(y+z)+x|=|(y+z)-x|$ rezultă că $x=0$ sau $y+z=0$ iar din $|x-(y-z)|=|x+(y-z)|$ rezultă că $x=0$ sau $y-z=0$. Dacă $x=0$ atunci relaţia din ipoteză implică $|y+z|=|y-z|$, adică $y=0$ sau $z=0$. Dacă $x\neq0$, atunci $y+z=0$ şi $y-z=0$, de unde rezultă $y=z=0$.

22. Deoarece $|a|+|b|\geq|a+b|$ şi $|a|=|-a|$, pentru orice numere reale a şi b,avem $3\geq|4x^2-1|+|4x-5|\geq|4x^2-4x+4|=|(2x-1)^2+3|\geq3$, deci $(2x-1)^2=0$, rezultă că $x=\frac{1}{2}$ **23.** Notăm, de exemplu, $a=998\frac{99}{112}$ şi $b=997\frac{99}{112}$. Avem :

Scanned with OKEN Scanner

$ab-(a+1)(b-1)=ab-ab+a-b+1=2$

24. $\frac{2^2+1}{2^2-1}+\frac{3^2+1}{3^2-1}+\frac{4^2+1}{4^2-1}+...+\frac{n^2+1}{n^2-1}=1+\frac{2}{1\cdot 3}+1+\frac{2}{2\cdot 4}+...+1+\frac{2}{(n-1)(n+1)}=$

$=n-1+\frac{1}{1}-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+...+\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}=n+\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}\right)$.

Cum $\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}\le\frac{1}{4}+\frac{1}{5}=\frac{9}{20}<\frac{1}{2}$, rezultă că $0<\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}\right)<\frac{1}{2}$. Adunând n peste tot, obținem concluzia.

1.4. Intervale în $\mathbb{R}$

1. *a)* $[3,+\infty)$; *b)* $(-\infty;-2)$; *c)* $(-\infty,6)$; *d)* $(4,5;+\infty)$; *e)* $[-1;3)$; *f)* $(4;10)$; *g)* $[-2;5]$; *h)* $(0;7)$. **2.** A şi D nu sunt intervale; $B=[-3;7]$, $C=[4;7,5)$, $E=[-3;+\infty)$, $F=\left(-\infty;\frac{13}{5}\right)$. **3.** *a)* A; *b)* A; *c)* F; *d)* A; *e)* F; *f)* F. **4.** *a)* $(-7;3]$; *b)* $(0;7)$; *c)* $[-1;1]$; *d)* $(4;+\infty)$; *e)* $(-\infty;9]$; *f)* $[-6;+\infty)$. **5.** *a)* A; *b)* F; *c)* F; *d)* A; *e)* F; *f)* F. **6.** *a)* A; *b)* A; *c)* A; *d)* A. **7.** *a)* $(0;5]$; *b)* $(0;4]$; *c)* $(3;7)$; *d)* $[-3;7]$; *e)* $[5;11]$; *f)* $(-3;5)$; *g)* $[-4;0]$; *h)* $(-\infty;5]$; *i)* $(-\infty;3)$. **8.** *a)* $x\in[0;12]$; *b)* $x\in[0;130]$; *c)* $x\in[2;14]$; *d)* $x\in[1,95;2,05]$. **9.** *a)* $(-1;12]$; *b)* $(-\infty;0]$; *c)* $[2;4]$; *d)* $\{0;1;2;3\}$; *e)* $\{-3;-2;-1;0;1\}$; *f)* $\{1\}$. **10.** *a)* $x\in[-3;3]$; *b)* $x\in[-4;4]$; *c)* $x\in(-2;2)$. **11.** *a)* $A=[-7;7]$; *b)* $B=(-3;3)$; *c)* $C=(-1;3)$; *d)* $-9\le 2x+3\le 9\overset{-3}{\Rightarrow}-12\le 2x\le 6\overset{:2}{\Rightarrow}$ $-6\le x\le 3\Rightarrow D=[-6;3]$; *e)* $E=\varnothing$; *f)* $F=\left\{\frac{1}{2}\right\}$. **12.** *a)* $A=(-\infty;-3]\cup[3;+\infty)$; *b)* $B=(-\infty;-7)\cup(7;+\infty)$; *c)* $C=(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$; *d)* $D=(-\infty;-3]\cup[1;+\infty)$; *e)* $E=(-\infty;-7)\cup(4;+\infty)$; *f)* $F=\left(-\infty;-\frac{7}{3}\right]\cup[3;+\infty)$. **13.** *a)* $B=[-3;3]$; *b)* $A=\{-2;-1;...;6\}\Rightarrow Card\,A=9$; *c)* $A\cup B=[-3;3]\cup\{4;5;6\}$, $A\cap B=\{-2;-1;...;3\}$, $A\setminus B=\{4;5;6\}$. **14.** *a)* $D=\{\pm1;\pm2;\pm3;\pm4;\pm6;\pm8;\pm12;\pm24\}$; *b)* $Card\,D=16$; *c)* $D\cap\mathbb{Z}=D$. **15.** *a)* $(-\infty;0)$; *b)* $(-\infty;3)$; *c)* $[-2;+\infty)$; *d)* $(-1;7]$; *e)* $(0;10)$; *f)* $[\sqrt{5};20)$. **16.** *a)* $[-1;6]$; *b)* $(-2;0)$; *c)* $(-5;0]$; *d)* $[3;5)$; *e)* $[1;+\infty)$; *f)* $(-\infty;4)$; *g)* $(-\infty;2]$; *h)* $(5;+\infty)$; *i)* $[\sqrt{5};\sqrt{15})$; *j)* $\left(-\frac{2}{3};\sqrt{7}\right)$. **17.** *a)* -2; *b)* -2; *c)* -2; *d)* 0. **18.** *a)* 5; *b)* -3; *c)* 9; *d)* 5. **19.** *a)* 2; *b)* 3; *c)* -1; *d)* -2. **20.** *a)* -1; *b)* -3; *c)* 2; *d)* -1. **21.** *a)* $[-3;7]$; *b)* $(-2;5)$; *c)* $\{-3;-2;...;5;6\}$; *d)* $\{1;2;...;6\}$; *e)* $(-4;10)$; *f)* $(-2,21]$; *g)* $\varnothing$; *h)* $(-5;2)$; *i)* $\{-4\}$. **22.** *a)* 6; *b)* 2; *c)* 1; *d)* $\frac{4}{5}$. **23.** *a)* $A=[-10;10]$, $l(A)=20$; *b)* $B=(-4;10)$, $l(B)=14$; *c)* $C=[-1;11]$, $l(C)=12$; *d)* $D=(7;27]$, $l(D)=20$; *e)* $E=\left[-\frac{3}{2};1\right]$, $l(E)=\frac{5}{2}$; *f)* $F=\left(-\frac{4}{3};\frac{8}{3}\right)$, $l(F)=4$. **24.** *a)* 5; *b)* 7; *c)* 4; *d)* 6; *e)* 5; *f)* $n+2$. **25.** *a)* $m=-5$, $n=4$; *b)* $m=-1$, $n=3$; *c)* $m=0$, $n=10$; *d)* $m=-7$, $n=0$. **26.** *a)* $A=[-3;3]$, $B=\left(-2,8\frac{1}{3}\right)$, $A\cup B=\left[-3;8\frac{1}{3}\right)$, $A\cap B=(-2;3]$, $A\setminus B=[-3;-2]$, $B\setminus A=\left(3;8\frac{1}{3}\right)$, $A\cap\mathbb{N}=\{0;1;2;3\}$, $B\cap\mathbb{Z}=\{-1;0;...;8\}$; *b)* $A=(-4;3)$, $B=[-3;4]$, $A\cup B=(-4;4]$, $A\cap B=[-3;3)$, $A\setminus B=(-4;-3)$, $B\setminus A=[3;4]$, $A\cap\mathbb{N}=\{0;1;2\}$, $B\cap\mathbb{Z}=\{-3;-2;...;4\}$; *c)* $A=(-4;0)$, $B=\left[-\frac{9}{5};3\right]$, $A\cup B=(-4;3]$,

Scanned with OKEN Scanner

$A\cap B=\left[-\frac{9}{5},0\right)$, $A\setminus B=\left(-4;-\frac{9}{5}\right)$, $B\setminus A=[0;3]$, $A\cap\mathbb{N}=\varnothing$, $B\cap\mathbb{Z}=\{-1;0;...;3\}$; **d)** $A=[9;13]$, $B=(10;14)$, $A\cup B=[9;14)$, $A\cap B=(10;13]$, $A\setminus B=[9;10]$, $B\setminus A=(13;14)$, $A\cap\mathbb{N}=\{9;10;...;13\}$, $B\cap\mathbb{Z}=\{11;12;13\}$; **e)** $A\setminus B=\varnothing$, $A=\left[-\frac{30}{9};\frac{30}{9}\right]$, $B=\left[-\frac{7}{2};\frac{13}{2}\right]$, $A\cup B=\left[-\frac{7}{2};\frac{13}{2}\right]$, $A\cap B=\left[-\frac{30}{9};\frac{30}{9}\right]$, , $B\setminus A=\left[-\frac{7}{2};-\frac{30}{9}\right)\cup\left(\frac{30}{9};\frac{13}{2}\right]$, $A\cap\mathbb{N}=\{0;1;2;3\}$, $B\cap\mathbb{Z}=\{-3;-2;...;6\}$; **f)** $A=(-2;4)$, $B=\left(-\frac{13}{5};1\right)$, $A\cup B=\left(-\frac{13}{5},4\right)$, $A\cap B=(-2;1)$, $A\setminus B=[1;4)$, $B\setminus A=\left(-\frac{13}{5};-2\right]$, $A\cap\mathbb{N}=\{0;1;2;3\}$, $B\cap\mathbb{Z}=\{-2;-1;0\}$.

27. **a)** $[-3;3]=[m-1;n-1]\Rightarrow m=-2;n=4$; **b)** $[-2;8]=[m;n]\Rightarrow m=-2;n=8$. **28.** **a)** $I=[-1;7)$; **b)** $I=(0;5)$; **c)** $I=(0;5]$; **d)** $I=[-3;6]$; **e)** $I=[-3;4)$; **f)** $I=(-5;2)$. **29.** **a)** $a=2$, $b=4$; **b)** $a=-3$, $b=-2$; **c)** $a=-4$, $b=-2$; **d)** $a=6$, $b=4$; **e)** $a=1$, $b=4$; **f)** $a=-5$, $b=8$. **30.** **a)** $\{-3;-2;...;3\}$; **b)** $\{-3;-2;-1\}$; **c)** $\{-2;-1;1;2\}$; **d)** $\{0;1;...;8\}$; **e)** $[-2;3]$; **f)** $\{-3;-2;-1;0\}$. **31.** **a)** $a=1-\frac{1}{4}\in\left[\frac{1}{2};0,9\right]$; **b)** $b=1-\frac{1}{100}\in\left[\frac{51}{100};1\frac{1}{10}\right]$; **c)** $c=\frac{1}{2}-\frac{1}{8}+\frac{1}{8}-\frac{1}{18}+\frac{1}{18}-\frac{1}{32}=\frac{15}{32}\in\left(-1;\frac{7}{8}\right)$. **32.** **a)** A; **b)** F, pentru că în cazul $I\subset J$ avem $I\cap J=I\Rightarrow l(I\cap J)=l(I)$. **33.** **a)** $A=(-\infty;1)\cup(3;+\infty)$, $B=[-\sqrt{5};\sqrt{5}]$, $A\cap B=[-\sqrt{5};1)$, $A\setminus B=(-\infty,-\sqrt{5}]\cup(3;+\infty)$, $B\setminus A=[1;\sqrt{5}]$, $B\cap\mathbb{N}^*=\{1;2\}$; **b)** $A=(-\infty;-13]\cup[3;+\infty)$, $B=(-4;11]$, $B\cap\mathbb{N}^*=\{1;2;...;11\}$, $A\setminus B=(-\infty,-13]\cup(11;+\infty)$, $B\setminus A=(-4;3)$, $A\cap B=[3;11]$. **34.** **a)** $[m;n]\subset[-3;6]\Rightarrow -3\le m<n\le 6$. Rezultă că $-3\in[m;n]$ doar dacă $m=-3$. Analog $n=6$; **b)** $\{-2;3\}\subset[m;n]\subset[-2;3]\Rightarrow m=-2$ şi $n=3$.

35. **a)** $\frac{a+b}{2}\in[a,b]\Leftrightarrow a\le\frac{a+b}{2}\le b\Leftrightarrow 2a\le a+b\le 2b$, adevărat; **b)** $\sqrt{ab}\in[a,b]\Leftrightarrow a\le\sqrt{ab}\le b\Leftrightarrow a^2\le ab\le b^2$, adevărat; **c)** $\frac{2ab}{a+b}\in[a,b]\Leftrightarrow a\le\frac{2ab}{a+b}\le b$ $\overset{\cdot(a+b)}{\Leftrightarrow}$ $a^2+ab\le 2ab\le ab+b^2\Leftrightarrow a^2\le ab\le b^2$, adev.;

d) $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}\in[a,b]\Leftrightarrow a\le\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}\le b\Leftrightarrow a^2\le\frac{a^2+b^2}{2}\Leftrightarrow b^2\Leftrightarrow 2a^2\le a^2+b^2\le 2b^2$, adevărat. **36.** Scriind $x=a+(b-a)\cdot t$ stabilim că $a\le x$ (deoarece $(b-a)\cdot t\ge 0$) şi $x\le a+(b-a)\cdot 1=b$ (deoarece $t\le 1$). **37.** Presupunând că $I\cap\mathbb{Z}=\varnothing$ ar rezulta că intervalul I se află între două numere întregi consecutive, adică există $n\in\mathbb{Z}$ astfel încât $I\subset[n;n+1]$, deci $l(I)\le 1$, în contradicţie cu ipoteza $l(I)>1$. **38.** Egalitatea din enunţ este echivalentă cu $(a+1)^2+(b-2)^2+(c-3)^2=25$. Cum pătratele sunt pozitive, rezultă că fiecare dintre cele trei pătrate este mai mic sau egal decât 25. Din $(a+1)^2\le 25$ rezultă $|a+1|\le 5$, adică $a\in[-4;6]$. Analog se demonstrează şi celelalte două cerinţe. **39.** Avem $a_1,a_2,a_3,a_4,a_5\in\left(0;\frac{1}{4}\right)\cup\left(\frac{1}{4};\frac{2}{4}\right)\cup\left(\frac{2}{4};\frac{3}{4}\right)\cup\left(\frac{3}{4};1\right)$ (se pot lua intervale deschise, deoarece numerele sunt iraţionale). Conform principiului lui Dirichlet, există două dintre cele cinci numere (să le notăm a_i şi a_j aflate în acelaşi interval din cele patru. Cum lungimea fiecărui interval este $\frac{1}{4}$, rezultă că $|a_i-a_j|<\frac{1}{4}$. **40.** **a)** Deoarece $I\cap J$ este un interval deschis cu

Scanned with OKEN Scanner

marginile numere întregi, din condiția $I\cap J\cap\mathbb{N}=\{2\}$ rezultă că $I\cap J=(1,3)$, deci $(a,3b+1)\cap(3a-5,b+2)=(1;3)$. Există patru situații posibile: I) $a=1$, $3b+1=3$ și $3a-5\le a<3b+1\le b+2$, II) $a=1$, $b+2=3$ și $3a-5\le a<b+2\le 3b+1$, III) $3a-5=1$, $3b+1=3$ și $a\le 3a-5<3b+1\le b+2$ și IV) $3a-5=1$, $b+2=3$ și $a\le 3a-5<b+2\le 3b+1$. Se verifică cu ușurință că numai în cazul II condițiile avem o soluție validă, așadar $a=b=1$; *b)* Pentru ca intervalele I și J să fie disjuncte ar trebui să avem $a<3b+1\le 3a-5<b+2$ sau $3a-5<b+2\le a<3b+1$. Vom arăta că prima relație este imposibilă, analog demonstrându-se și imposibilitatea celei de a doua relații. Din inegalitatea $3b+1<b+2$ rezultă $b<\frac{1}{2}$ iar din $a<3a-5$ rezultă $a>\frac{5}{2}$. Dar inegalitatea $a<b+2$ nu este compatibilă cu relațiile $a>\frac{5}{2}$, $b<\frac{1}{2}$, cum lesne se poate constata evaluând diferența $a-b$ **41.** *a)* $I_1\cap\mathbb{N}=\{5;6\}$, $I_2\cap\mathbb{N}=\{3;4;...;8\}$, $I_5\cap\mathbb{N}=\{2;3;...;9\}$; *b)* Mai întâi să constatăm că I_n este corect definit (este interval) pentru orice $n\in\mathbb{N},n\ge 1$. Într-adevăr $1+\frac{4}{n}\le 1+\frac{4}{1}=5$ și $10-\frac{4}{n}\ge 10-\frac{4}{1}=6$, deci $1+\frac{4}{n}<10-\frac{4}{n}$. Incluziunea $I_n\subset I_{n+1}$ este asigurată de inegalitățile evidente $1+\frac{4}{n+1}<1+\frac{4}{n}$, respectiv $10-\frac{4}{n}<10-\frac{4}{n+1}$.

1.5. Operații cu numere reale

1. *a)* -9; *b)* -2; *c)* 0; *d)* 13; *e)* -4; *f)* -5; *g)* 0; *h)* -1; *i)* $-5\sqrt{3}$; *j)* 0; *k)* 1; *l)* $-\frac{1}{6}$; *m)* $9\sqrt{5}$; *n)* 1; *o)* 0; *p)* $-\sqrt{2}$. **2.** *a)* $\frac{4}{3}$; *b)* -1; *c)* -2; *d)* 0. **3.** *a)* $x+y+z=3$, $-x+y+z=1$, $x-y+z=7$, $x+y-z=-5$; *b)* $x+y+z=0$, $-x+y+z=1$, $x-y+z=-\frac{2}{3}$, $x+y-z=-\frac{1}{3}$; *e)* $x+y+z=-3\sqrt{5}$, $-x+y+z=-5\sqrt{5}$, $x-y+z=3\sqrt{5}$, $x+y-z=-\sqrt{5}$. **4.** *a)* -30; *b)* -104; *c)* $-\sqrt{15}$; *d)* -1; *e)* $-3\sqrt{5}$; *f)* -4; *g)* $-\frac{1}{8}$; *h)* $-\frac{15}{4}$; *i)* $\frac{5}{9}$; *j)* $-\frac{2}{9}$; *k)* $-3{,}14$; *l)* $\sqrt{5}$; *m)* $2\sqrt{6}$; *n)* $-2\sqrt{3}$; *o)* -1; *p)* $-\frac{2}{3}$. **6.** *a)* 40; *b)* -27; *c)* -44; *d)* $\frac{49}{5}$; *e)* $\sqrt{21}-\sqrt{15}+\sqrt{6}$; *f)* $-5+2\sqrt{55}-3\sqrt{5}$; *g)* $-24\sqrt{15}-36\sqrt{10}+10\sqrt{35}$; *h)* $15\sqrt{15}-10\sqrt{3}$. **7.** *a)* $\sqrt{3}$; *b)* $\sqrt{6}$; *c)* $3-\sqrt{3}$; *d)* $-2\sqrt{15}-10\sqrt{10}+6\sqrt{5}$; *e)* $6-5\sqrt{6}$; *f)* $6\sqrt{35}-16+5\sqrt{7}-3\sqrt{5}$. **8.** Folosind formula $(a+b)\cdot(a-b)=a^2-b^2$, se arată că $x\cdot y=1$. **9.** *a)* 9; *b)* -27; *c)* $-0{,}001$; *d)* $0{,}001$; *e)* $\frac{1}{4}$; *f)* 4; *g)* $\frac{1}{2}$; *h)* 2; *i)* 2; *j)* $-2\sqrt{2}$; *k)* $-\frac{125}{8}$; *l)* $-\frac{3\sqrt{3}}{8}$. **10.** *a)* -4; *b)* -2; *c)* 0; *d)* 0; *e)* $\sqrt{2}$; *f)* 16; *g)* $-\frac{3}{4}$; *h)* $\frac{3}{4}$; *i)* $2+2\sqrt{2}$. **11.** *a)* $(\sqrt{2})^0<(\sqrt{2})^1<(\sqrt{2})^3<(\sqrt{2})^4$; *b)* $(-\sqrt{2})^3<(-\sqrt{2})^1<(-\sqrt{2})^0<(-\sqrt{2})^4$; *c)* $(\sqrt{3})^{-4}<(\sqrt{3})^{-3}<(\sqrt{3})^{-1}<(\sqrt{3})^0$; *d)* $(-\sqrt{3})^{-1}<(-\sqrt{3})^{-3}<(-\sqrt{3})^{-4}<(-\sqrt{3})^0$. **12.** *a)* 3,16; *b)* 11,18; *c)* 71,49; *d)* 153,45. **13.** *a)* $5\sqrt{3}$; *b)* $3\sqrt{7}$; *c)* $6\sqrt{33}$; *d)* $7a^2\sqrt{5}$; *e)* $729\sqrt{101}$; *f)* $5a^2b^4\sqrt{17}$. **14.** *a)* $2\sqrt{3}$; *b)* $2\sqrt{5}$; *c)* $3\sqrt{7}$; *d)* $5\sqrt{3}$; *e)* $7\sqrt{2}$; *f)* $4\sqrt{2}$; *g)* $10\sqrt{2}$; *h)* $10\sqrt{10}$; *i)* $9\sqrt{3}$; *j)* $11\sqrt{3}$; *k)* $3a^2\sqrt{2}$; *l)* $5\cdot|a|\cdot b^2\sqrt{2}$. **15.** *a)* $2\sqrt{3}$; *b)* $9\sqrt{11}$; *c)* $-11\sqrt{5}$; *d)* $-6\sqrt{2}$; *e)* $3\sqrt{6}$; *f)* $22\sqrt{7}$. **16.** *a)* $\sqrt{20}$; *b)* $-\sqrt{539}$; *c)* $\sqrt{338}$; *d)* $\sqrt{192}$; *e)* $\sqrt{1300}$; *f)* $\sqrt{8a^2}$; *g)*

Scanned with OKEN Scanner

$-\sqrt{45x^2}$; *h)* $\sqrt{45a^4}$. **17.** *a)* $\sqrt{50}>7$; *b)* $\left(2\sqrt{3}\right)^2<\left(3\sqrt{2}\right)^2\Rightarrow 2\sqrt{3}<3\sqrt{2}$; *c)* $5>2\sqrt{6}\Rightarrow -5<-2\sqrt{6}$; *d)* $\sqrt{35}<6\Rightarrow\sqrt{35}-6<0$; *e)* $8\cdot 10>5\cdot 6\sqrt{7}\Rightarrow\frac{8}{5}>\frac{6\sqrt{7}}{10}$; *f)* $7>4\sqrt{3}\Rightarrow 7-4\sqrt{3}>0$; *g)* $\frac{\sqrt{5}}{7}<1\Rightarrow\frac{\sqrt{5}}{7}<3$; *h)* $\sqrt{3}\cdot 5>3\cdot 2\sqrt{2}\Rightarrow\frac{\sqrt{3}}{3}>\frac{2\sqrt{2}}{5}\Rightarrow\frac{\sqrt{3}}{3}-\frac{2\sqrt{2}}{5}>0$. **18.** Pentru aflarea zecimalelor unui număr de forma $a\sqrt{b}$, se aplică algoritmul de extragere a rădăcinii pătrate, dar numai după introducerea factorului sub radical; *a)* 2,23 ; *b)* $\frac{\sqrt{7}}{5}=\sqrt{\frac{7}{25}}=\sqrt{0,28}=0,52...$; *c)* $6\sqrt{5}=\sqrt{180}=13,41...$; *d)* $15\sqrt{2}=\sqrt{450}=21,21...$. **19.** *a)* 23; *b)* $\frac{3}{2}$; *c)* 0; *d)* 2; *e)* $3\sqrt{2}$; *f)* $\frac{\sqrt{3}}{3}$. **20.** *a)* 26; *b)* 15; *c)* 444 ; *d)* 6. **21.** *a)* $\sqrt{2}=1+\left(\sqrt{2}-1\right)$; *b)* $2=\sqrt{3}+\left(2-\sqrt{3}\right)$. **22.** *a)* $x=\sqrt{2}$, $y=-\sqrt{2}$; *b)* $x=3-\sqrt{2}$, $y=3+\sqrt{2}$. **23.** $\frac{a+b}{2}=-4\Rightarrow a+b=-8\Rightarrow b=-8-a$; *a)* $b=-21$; *b)* $b=-10,5$; *c)* $b=-5\frac{2}{3}$; *d)* $b=-8-2\sqrt{2}$. **24.** $\sqrt{ab}=6\Rightarrow ab=36\Rightarrow b=\frac{36}{a}$; *a)* 9; *b)* $\frac{162}{7}$; *c)* $\frac{45}{4}$; *d)* $3\sqrt{6}$. **25.** *a)* $x=-\sqrt{5}$; *b)* $x=\sqrt{3}$; *c)* $x=2$; *d)* $x=6$; *e)* $x=\pm 2$; *f)* $x=\sqrt{7}\pm 1$. **26.** *a)* $(-5)\cdot(-134+34)=(-5)\cdot(-100)=500$; *b)* 39; *c)* 0; *d)* -17 ; *e)* $(-4)^{30}-\left(4^2\right)^{15}=0$; *f)* 0.

27. *a)* 12; *b)* 40; *c)* 11; *d)* $-3,(3)$; *e)* 354; *f)* 0. **28.** *a)* $-\frac{15}{11}$; *b)* 6; *c)* -3 ; *d)* 1; *e)* $-\frac{1}{15}$; *f)* $8\frac{1}{2}$. **29.** *a)* $9\sqrt{5}$; *b)* $7\sqrt{3}$; *c)* 0; *d)* $3\sqrt{2}$; *e)* 12; *f)* $25-3\sqrt{3}$. **30.** *a)* -70 ; *b)* $14\sqrt{3}-24$; *c)* $117-28\sqrt{7}$; *d)* $10\sqrt{3}$; *e)* $-5\sqrt{6}+\sqrt{7}$; *f)* $3\sqrt{5}$. **31.** *a)* $S=12+13\sqrt{3}$; *b)* $T=\sqrt{1}+|-7|+7\sqrt{7}+(-7)^2+7^2\sqrt{7}=57+56\sqrt{7}$. **32.** *a)* A; *b)* F; *c)* A; *d)* F. **33.** *a)* $18+\sqrt{274}$; *b)* 107; *c)* 26; *d)* $8\sqrt{5}$; *e)* 5; *f)* 23; *g)* -4 ; *h)* 75. **34.** $a=-5+5\sqrt{5}\Rightarrow b=-5$, $c=d=5$. **35.** *a)* $\sqrt{5}$; *b)* $-\sqrt{15}$; *c)* $-\sqrt{\frac{2}{9}}$; *d)* $\sqrt{\frac{50}{3}}$; *e)* $-\sqrt{2a^2}$; *f)* $\sqrt{2a^4}$; *g)* $\sqrt{n^3}$; *h)* $\sqrt{7a^2c^6}$. **36.** *a)* $\sqrt{44x^2}=2\sqrt{11}\cdot|x|=2\sqrt{11}\cdot(-x)=-2x\sqrt{11}$; *b)* $35b^2$; *c)* $\frac{a^{-2}}{b}$. **37.** *a)* $3\sqrt{3}$; *b)* $12\sqrt{11}$; *c)* $-11\sqrt{5}$. **38.** *a)* 21; *b)* $6\sqrt{5}$; *c)* 0; *d)* -100 . **39.** *a)* 72; *b)* 25; *c)* 10; *d)* 540. **40.** *a)* $\sqrt{2}$; *b)* 26; *c)* 16; *d)* -2 ; *e)* $-\sqrt{5}$. **41.** *a)* $1\in\mathbb{Z}$; *b)* $5\in\mathbb{N}$; *c)* $0\in\mathbb{Z}$; *d)* $\frac{13}{2}\in\mathbb{Q}\setminus\mathbb{Z}$. **42.** $S=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+...+\left(\frac{1}{99}-\frac{1}{100}\right)=\frac{1}{2}-\frac{1}{100}=0,49$. **43.** $E(n)=(-1)^n\cdot\frac{4}{3}$, aşadar $E(n)=\frac{4}{3}$ dacă n este par şi $E(n)=-\frac{4}{3}$ dacă n este impar. **44.** $x^2=\left(\left|\sqrt{5}-\sqrt{7}\right|+\left|\sqrt{5}+\sqrt{7}\right|\right)^2=28$. **45.** *a)* A; *b)* A; *c)* A; *d)* A. **46.** *a)* Prin calcul efectiv se obţine $\frac{a+b}{2}=\sqrt{165}-2\sqrt{22}+6\sqrt{3}-3\sqrt{10}$; *b)* $\frac{a+b}{2}=20-8\sqrt{6}$. **47.** Rearanjăm factorii produsului $a\cdot b$ pentru a folosi formula produsului sumei cu diferenţa şi obţinem $a\cdot b=(3-1)(3-2)(4-3)\cdot...\cdot(21-20)=2$, deci $m_g(a,b)=\sqrt{2}$. **48.** *a)* $\sqrt{42}$; *b)* $2\sqrt{39}$. **49.** *a)* $30+10\sqrt{5}=30+2\cdot 5\cdot\sqrt{5}=5^2+\left(\sqrt{5}\right)^2+2\cdot 5\cdot\sqrt{5}=\left(5+\sqrt{5}\right)^2$; *b)* Asemănător cu *a)* se arată că $3-2\sqrt{2}=\left(\sqrt{2}-1\right)^2$. Astfel, valoarea expresiei este $\left|3-\sqrt{2}\right|+\left|\sqrt{2}-1\right|=2\in\mathbb{Q}$.

Scanned with OKEN Scanner

50. $a=6$. Apoi, ținând seama că $8\pm2\sqrt{7}=\left(\sqrt{7}\pm1\right)^2$ și $16-6\sqrt{7}=\left(3-\sqrt{7}\right)^2$ obținem $b=6$, deci $a=b$. **51.** *a)* $10-2\sqrt{21}=\left(\sqrt{7}-\sqrt{3}\right)^2 \Rightarrow \sqrt{\sqrt{10-2\sqrt{21}}-\sqrt{7}}=-\sqrt{3}\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$; *b)* Folosind egalitățile $13\pm4\sqrt{3}=\left(2\sqrt{3}\pm1\right)^2$ și apoi $4\pm2\sqrt{3}=\left(\sqrt{3}\pm1\right)^2$ obținem că valoarea expresiei date este $2\in\mathbb{N}$. **52.** *a)* $-3\in\mathbb{Z}-\mathbb{N}$; *b)* $4\in\mathbb{N}$. **53.** Înlocuind $y=x+2$ obținem $E(x,y)=\sqrt{2x^2}-\sqrt{2(x^2+2x+1)}=x\sqrt{2}-(x+1)\sqrt{2}=-\sqrt{2}$. **54.** Inegalitatea se poate scrie sub forma $\sqrt{5(x-2)^2+4}+\sqrt{(y+7)^2+1}+\sqrt{(z-5)^2}\le3$ de unde se deduce cu ușurință că $x=2$, $y=-7$ și $z=5$. **55.** Inegalitatea este echivalentă cu $\sqrt{\left(b-5\sqrt{2}\right)^2+1}+\sqrt{\left(c-\sqrt{14}\right)^2+16}\le5$ de unde rezultă $b=5\sqrt{2}$ și $c=\sqrt{14}$. Aria triunghiului este egală cu $\frac{b\cdot c}{2}=5\sqrt{7}$.

56. Este necesar și suficient ca numărul $\overline{xy}+\sqrt{\overline{yx}+4}$ să fie pătrat perfect. Atunci este necesar (nu și suficient) ca $\overline{yx}+4$ să fie pătrat perfect. Există posibilitățile: $\overline{yx}+4\in\{16,25,36,49,64,81,100\}$, de unde aflăm $\overline{yx}$, apoi $\overline{xy}$ și în fiecare situație probăm condiția ca $\overline{xy}+\sqrt{\overline{yx}+4}$ să fie pătrat perfect. Obținem $\overline{xy}=21$. **57.** Avem $\frac{1}{\sqrt{2k+1+2\sqrt{k(k+1)}}}=\frac{1}{\sqrt{(\sqrt{k}+\sqrt{k+1})^2}}=\frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}}=\sqrt{k+1}-\sqrt{k}$. Se obține $n=120$. **58.** *a)* $1+3+5+..+(2n-1)=2\cdot(1+2+3+...+n)-n=n(n+1)-n=n^2$; *b)* Folosind succesiv formula de la punctul anterior se obține rezultatul $\sqrt{1+3+5+...+1007}=504$. **59.** Fiecare termen al sumei din prima paranteza este de forma $\frac{n+3}{3\cdot n}$. Scriind $\frac{n+3}{3\cdot n}=\frac{1}{3}+\frac{1}{n}$, numărul de sub radical este egal cu $\frac{1}{3}\cdot75=25$. Rezultatul final este $\sqrt{25}=5$. **60.** Analog cu problema anterioară, $\frac{n+7}{7n}=\frac{1}{7}+\frac{1}{n}$. Se obține rezultatul final $\sqrt{\frac{1}{7}\cdot343}=7$. **61.** Folosind descompunerea $\frac{1}{n(2n+2)}=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$ se obține rezultatul $\frac{7}{10}$. **62.** Folosind egalitatea $\frac{1}{n(n+1)(n+2)}=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{n(n+1)}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right)$ se obține rezultatul $\frac{3\sqrt{34}}{35}$. **63.** *a)* Ridicând la pătrat obținem $1+\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{n^2}=\frac{(n^2+n+1)^2}{n^2\cdot(n+1)^2}$, care se verifică direct; *b)* Folosind relația de la punctul *a)* și utilizând descompunerea $\frac{n^2+n+1}{n(n+1)}=1+\frac{1}{n(n+1)}=1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$ avem $S=\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(1+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+...+\left(1+\frac{1}{98}-\frac{1}{99}\right)$ de unde rezultă $S=97+\frac{1}{2}-\frac{1}{99}$.

1.6. Raționalizarea numitorilor

1. *a)* $\frac{\sqrt{5}}{5}$; *b)* $\sqrt{11}$; *c)* $-\frac{\sqrt{6}}{3}$; *d)* $-\frac{\sqrt{35}}{7}$; *e)* $3\sqrt{6}$; *f)* $-\frac{2\sqrt{5}}{5}$; *g)* $20\sqrt{5}$; *h)* $\frac{4\sqrt{10}}{5}$; *i)* $\frac{\sqrt{3}}{6}$; *j)* $-\frac{\sqrt{6}}{4}$; *k)* $\frac{\sqrt{22}}{77}$; *l)* $\frac{\sqrt{a}}{a}$. **2.** *a)* $\frac{1}{\sqrt{2}}=\sqrt{\frac{1}{2}}=\sqrt{0,5}=0,70...$; *b)* $\frac{3}{\sqrt{7}}=\sqrt{\frac{9}{7}}=\sqrt{1,2857...}=1,13...$;

Scanned with OKEN Scanner

c) $\frac{6}{3\sqrt{5}}=\sqrt{\frac{4}{5}}=\sqrt{0,8}=0,89\ldots$; *d)* $\frac{2}{3\sqrt{3}}=\sqrt{\frac{4}{27}}=\sqrt{0,1481\ldots}=0,38\ldots$. **3.** *a)* $2+\sqrt{3}$; *b)* $\sqrt{5}+\sqrt{2}$; *c)* $\frac{\sqrt{3}-\sqrt{7}}{2}$; *d)* $11\cdot(\sqrt{5}-2)$; *e)* $\sqrt{11}-4$; *f)* $\frac{3\cdot(5+\sqrt{13})}{2}$; *g)* $3\left(\sqrt{21}+\sqrt{18}\right)$; *h)* $2\cdot\left(\sqrt{24}-\sqrt{17}\right)$; *i)* $-\frac{3\cdot(4+\sqrt{5})}{2}$; *j)* $\frac{2\cdot(5-\sqrt{11})}{7}$; *k)* $6-\sqrt{33}$; *l)* $7+\sqrt{41}$; *m)* $\frac{\sqrt{65}-\sqrt{73}}{2}$; *n)* $3\sqrt{5}-5\sqrt{3}$; *o)* $\sqrt{2}+1$; *p)* $\frac{\sqrt{10}\cdot(\sqrt{14}+3)}{5}$. **4.** *a)* $\frac{24\sqrt{7}}{35}$; *b)* $\sqrt{14}-\sqrt{5}$; *c)* $\sqrt{5}$; *d)* 0. **5.** *a)* $-\frac{3}{8}$; *b)* $\frac{2\sqrt{3}}{9}$; *c)* $\frac{3\sqrt{5}-5}{4}$; *d)* $\frac{2\sqrt{7}-2}{9}$. **6.** *a)* $\frac{7\sqrt{5}}{2}$; *b)* $2\sqrt{15}$; *c)* $\frac{24\sqrt{5}}{7}$; *d)* $\frac{5\sqrt{10}}{2}$. **7.** *a)* $\frac{2\sqrt{3}-3}{3}$; *b)* $\frac{\sqrt{5}-5}{15}$; *c)* $\frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2}$; *d)* $\frac{\sqrt{15}}{15}$. **8.** *a)* $2\sqrt{6}+4$; *b)* $11+2\sqrt{30}$; *c)* $-\frac{3\sqrt{2}+2\sqrt{5}}{2}$; *d)* $\frac{\sqrt{30}}{10}$. **9.** *a)* $-\sqrt{3}$; *b)* $\frac{8\sqrt{3}+\sqrt{6}}{12}$; *c)* $-\frac{3}{4}$; *d)* $\frac{10\sqrt{3}+\sqrt{2}}{6}$; *e)* $\frac{7\sqrt{6}}{4}$; *f)* $-\frac{39}{15}$; *g)* $\frac{15\sqrt{7}}{7}-33$; *h)* 9. **10.** *a)* 4 ; *b)* $\frac{19}{5}$; *c)* $\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}=\frac{\left(\frac{a}{b}\right)^2+1}{\left(\frac{a}{b}\right)^2-1}=\frac{\frac{5}{7}+1}{\frac{5}{7}-1}=-6$. **11.** *a)* $2\sqrt{5}-4\sqrt{3}+3\sqrt{2}+3$; *b)* $-\frac{2}{3}$. **12.** *a)* 6; *b)* 6.

13. *a)* $c=4+\sqrt{3}$, $m_a(a,b)=10\sqrt{3}-2$. **14.** *a)* 28 ; *b)* 10; *c)* $\frac{\sqrt{193}}{4}$; *d)* $\frac{2\sqrt{170}}{5}$. **15.** $ab=\left(4\sqrt{5}\right)^2\Rightarrow b=\frac{80}{7-3\sqrt{5}}\Rightarrow b=20\left(7+3\sqrt{5}\right)$; $m_a(a,b)=\frac{147+57\sqrt{5}}{2}$. **16.** *a)* $x=-15$; *b)* $x=\frac{8}{3}$; *c)* $x=\frac{12+6\sqrt{6}-35\sqrt{3}}{21}$; *d)* $x=7\sqrt{2}+4\sqrt{3}-6$. **17.** *a)* A; *b)* F; *c)* A. **18.** *a)* $8+2\sqrt{2}$; *b)* $\frac{1}{2}$. **19.** *a)* $8+12\sqrt{15}-12\sqrt{21}$; *b)* Ajutați și de calculele de la punctul *a)* stabilim că $55-12\sqrt{21}=\left(3\sqrt{3}-2\sqrt{7}\right)^2$ și $47-12\sqrt{15}=\left(3\sqrt{3}-2\sqrt{5}\right)^2$. Rezultă că $a\sqrt{5}-b\sqrt{7}=2\sqrt{5}-2\sqrt{7}$, echivalent cu $(a-2)\cdot\sqrt{5}=(b-2)\cdot\sqrt{7}$. Cum $a,b\in\mathbb{Z}$, rezultă că $a=2$ și $b=2$. Într-adevăr, dacă de exemplu am avea $a\neq 2$ atunci ar rezulta $\sqrt{\frac{5}{7}}=\frac{b-2}{a-2}\in\mathbb{Q}$, ceea ce este fals. **20.** *a)* $\frac{16\sqrt{3}-3\sqrt{2}}{20}$; *b)* -5 ; *c)* $2-4\sqrt{3}$; *d)* 1; *e)* 9; *f)* $\frac{3}{25}$; *g)* $\frac{1}{2}$. **21.** $a=12$, $b=2$. Atunci $a\cdot b=24$; $a:b=6$ și $(a-b)^b=100$. **22.** Observând că $\left(1+\sqrt{6a+1}\right)^2=2\left(3a+1+\sqrt{6a+1}\right)$, se obține cu ușurință că $E=0$. **23.** Observăm că $19+8\sqrt{3}=\left(4+\sqrt{3}\right)^2$, $8+2\sqrt{15}=\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)^2$ și $6-2\sqrt{5}=\left(\sqrt{5}-1\right)^2$. Rezultă că $\frac{3}{a-2}\in\mathbb{Z}$, de unde $a\in\{-1;1;3;5\}$. **24.** $S=\sqrt{5}-1$. **25.** $\sqrt{n}-1=40\Rightarrow n=1681$. **26.** *a)* $\frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{\sqrt{k\cdot(k+1)}}=\frac{1}{\sqrt{k}}-\frac{1}{\sqrt{k+1}}\Rightarrow S=1-\frac{1}{\sqrt{n+1}}$; *b)* $\frac{1}{\sqrt{2k-1}+\sqrt{2k+1}}=\frac{\sqrt{2k+1}-\sqrt{2k-1}}{2}\Rightarrow S=\frac{\sqrt{2n+1}-1}{2}$; *c)* $\frac{1}{k\sqrt{k+1}+(k+1)\sqrt{k}}=\frac{(k+1)\sqrt{k}-k\sqrt{k+1}}{k\cdot(k+1)}=\frac{1}{\sqrt{k}}-\frac{1}{\sqrt{k+1}}\Rightarrow S=1-\frac{1}{\sqrt{n+1}}$.

Testul 1. **1.** $A\cap(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})=\left\{\sqrt{3};\pi;1-\sqrt{2}\right\}$. **2.** 9. **3.** $-\frac{3}{7}$. **4.** $84\in\mathbb{N}$; **5.** $x\in\left[-\frac{8}{5};2\right]$. **6.** 16. **7.** *a)* A; *b)* A; *c)* F. **8.** $\left(2\sqrt{3}\right)^2<\left(3\sqrt{2}\right)^2\Leftrightarrow 2\sqrt{3}<3\sqrt{2}\Leftrightarrow 5+2\sqrt{3}<5+3\sqrt{2}$. **9.** $-0,5\in\mathbb{Q}$.

Testul 2. **1.** $\sqrt{31}=5,56\ldots$. **2.** $\sqrt{7}-5$. **3.** $\sqrt{50}$. **4.** 24. **5.** $2x+3=\pm 11\Rightarrow x\in\{-7;4\}$. **6.** *a)*

Scanned with OKEN Scanner

$(-2;7]$; *b)* $[-4;8]$; *c)* $[-7;2)$. **7.** $31\frac{1}{24}$. **8.** $m_a=7$; $m_g=6$. **9.** $11\frac{1}{180}-\frac{6\sqrt{6}}{5}$.

Testul 3. **1.** $3+\sqrt{7}$. **2.** 5. **3.** $5\cdot 2^2\sqrt{3}$. **4.** -6 . **5.** $x\in\left\{-\frac{20}{3};\frac{28}{3}\right\}$. **6.** *a)* $[-2;7)$; *b)* $\{-2;-1;1;2;3;4;5\}$; *c)* $\{-2;-1;0\}$. **7.** -9. **8.** $11\frac{19}{24}$. **9.** *a)* 13548,43 ; *b)* 14000 ; *c)* 13548,4283 .

Testul 4. **1.** $x=a\sqrt{3}$, unde $a\in\mathbb{Q}$. **2.** 2,8(3) . **3.** $-8\sqrt{2}$. **4.** 13. **5.** $-3;\ 3^3;\ 3^{-1};\ \sqrt{3^4};\ (-\sqrt{3})^{-2}$. **6.** $x\in\left(-\frac{9}{2};3\right)$. **7.** *a)* F; *b)* A; *c)* A. **8.** $a=8+3\sqrt{2}$, $b=8+2\sqrt{5}$; $a<b$. **9.** $1\frac{53}{90}$.

1.7. Calcul cu numere reprezentate prin litere

1.7.1. Adunarea şi scăderea. **1.** *a)* 0; *b)* x ; *c)* $-ax$; *d)* $3cx$; *e)* $3x^2$; *f)* $-13y^3$; *g)* 0; *h)* $-abc$. **2.** *a)* $7x-3$; *b)* $-7a-3$; *c)* $14x-8$; *d)* $6x^2+7$; *e)* 12 ; *f)* $3a$. **3.** *a)* x ; *b)* $-5x^2-15$; *c)* $16x+2$; *d)* $6a-8x-25$; *e)* $19x^2-12x+10$; *f)* $-3ax+3$; *g)* $x^2+3a+23$; *h)* x^2-3x . **4.** *a)* $4x^2-6x+6$; *b)* x^3-4x^2+3x-3 ; *c)* $23x^2-7x+23$; *d)* $9x$; *e)* $4a-13b+4c-11$; *f)* $-m+n$. **5.** *a)* $2y+2$; *b)* $21y+3x-5xy-13$; *c)* $4x^2-7x-11$; *d)* $4x+3a+20$; *e)* $18x^2-8x+9$. **6.** *a)* $2x$; *b)* $-n$; *c)* $-3x$; *d)* $10m$; *e)* $-2m^2x$; *f)* am ; *g)* $10\sqrt{3}x$; *h)* $-\sqrt{3}x$; *i)* 0. **7.** *a)* $35x^2-18$; *b)* $-2\sqrt{5}$; *c)* $8\sqrt{2}$; *d)* $-6a^2$; *e)* $4x^2+6ax+14$; *f)* $4x^2-5x+6a$; *g)* $15b^2+149$. **8.** *a)* $17x^2+3a+7$; *b)* $-4x+47a+1$; *c)* $-2x^2+11$; *d)* $6x+3y\sqrt{2}-\sqrt{11}$; *e)* $a-4b$; *f)* $16x^2-10x+6$; *g)* $-10a-10m+32$; *h)* $2x^3+2x+20$. **9.** *a)* $-2x^2+10x+7$; *b)* $13x^2-2x-1$; *c)* $-4,4x^2+3,4x-1$; *d)* $y-\frac{49}{5}x+4$. **10.** *a)* $14y-4x$; *b)* $24-8x$; *c)* $(34\sqrt{2}-29\sqrt{3})x$; *d)* $28\sqrt{3}x^2$; *e)* $31\sqrt{2}x+50$. **11.** *a)* $2x+2$; *b)* $10x-y-3$; *c)* $14x-2y-1$; *d)* $6x-5$. **12.** *a)* -1 ; *b)* 2 ; *c)* 3,5; *d)* 13 ; *e)* $-8,5$; *f)* -35 ; *g)* 9 . **13.** *a)* $11\sqrt{2}-15$; *b)* $2a+5b+3c=2(a+b)+3(b+c)=5$; *c)* 33; *d)* $(11-8m+6n)^{100}=[1-2\cdot(4m-3n-5)]^{100}=1$. **14.** Primele trei laturi au lungimile $a+2b$, $3a-b$ şi $a+3b$ iar lungimea ultimei laturi, ca diferenţă dintre perimetru şi suma lungimilor primelor trei laturi este egală cu $3a-b$, deci latura a doua este egală cu a patra.

1.7.2. Înmulţirea, împărţirea, ridicarea la putere cu exponent întreg. **1.** *a)* $-18x$; *b)* $10x^2$; *c)* $-2x^3$; *d)* $6x^5$; *e)* $-8xy$; *f)* $32x^2y^4$; *g)* $-21x^2y$; *h)* $-x^3y^4$. **2.** *a)* $-x$; *b)* $-2x$; *c)* -1 ; *d)* $2xy$; *e)* $-\frac{1}{3}x$; *f)* $-3b$; *g)* $-y^2$; *h)* xy . **3.** *a)* x^2 ; *b)* $-8a^3x^6$; *c)* $9x^4y^2$; *d)* $-a^7b^{14}c^{21}$; *e)* $x^{20}y^{10}z^{30}$; *f)* $9x^4y^8$; *g)* $16a^4b^{12}$; *h)* $-16\sqrt{2}a^{12}b^9c^3$. **4.** *a)* $15a^3b^2c$; *b)* $12ax^5y^2z^2$; *c)* $3x^4y^3z$; *d)* $-26x^4y^3$; *e)* $-2x^6y^3$; *f)* $5a^4b^4$. **5.** *a)* $10x-2x^2$; *b)* $-8x^3+10x^2$; *c)* $-2x^3+6x^2-2x$; *d)* $10x^2y^2+15xy^3$; *e)* $7xy^2-7x^2y^2+14xy^4$; *f)* $3a^4b-3a^2b^2+6a^2b$. **6.** *a)* $5x$; *b)* $ax+3bx$; *c)* $x-2$; *d)* $-x^2+2x$; *e)* $2x+3$; *f)* $-3x^2+x$; *g)* 0 ; *h)* 0; *i)* $3x^2+2x$. **7.** *a)* a ; *b)* $2ab^5$; *c)* $2x$; *d)* $-2x$; *e)* -1 ; *f)* $\frac{16}{81}a^4b^{12}c^{20}$; *g)* $5ab^{-5}$;

Scanned with OKEN Scanner

h) $\frac{1}{4a^2b^2}$. **8.** *a)* $-3xy$; *b)* $-6x^4+3x^2$; *c)* $-\frac{3}{2}x^2y$; *d)* $7x^3y$; *e)* $-5a^2+10a$; *f)* $-5x^2y^3+6xy^4$; *g)* $x-3y$; *h)* $-4x^2+\frac{5}{2}x+\frac{2}{3}$; *i)* $5x^3+3x$; *j)* a^2-2a. **9.** *a)* $3a-2$; *b)* $3x-2y-1$; *c)* $4ac^2-2$; *d)* $-4-3mn$; *e)* $3a^2-2a+1$; *f)* $-7+x-4y$. **10.** *a)* $2x^2+5x-3$; *b)* $-x^3-3x^2+9$; *c)* 0; *d)* xy^3. **11.** *a)* $x^2+9y^2-6xy-7x+33y$; *b)* $2x^7$; *c)* $4x^2-3x$; *d)* 1. **12.** *a)* 0; *b)* 0; *c)* 0; *d)* 0. **13.** $4+2a-3b=-1\Rightarrow S=(-1)+(-1)^2+(-1)^3+...+(-1)^{2010}=0$. **14.** *a)* $13a^2b^4+79a^3b^3-6a^4b^2$; *b)* $-12a^4-13a^3+14a^2-7a+12$; *c)* $a^6-a^3-9ab^2+a^2b$; *d)* $2a^3+3b^3$. **15.** Dacă $a=0$ atunci $a\in\mathbb{Q}$, iar dacă $a\neq 0$, avem $\frac{a^{13}}{a^7}=a^6\in\mathbb{Q}$ şi apoi $\frac{a^7}{a^6}=a\in\mathbb{Q}$. **16.** $P=2a(a+5b)$. **17.** $A=a^2(a+b)^2$. **18.** $A=2ab^2(4-9a^2)$. **19.** $A=(a+b+c)^2$. **20.** *a)* Laturile egale au lungimile de $\frac{(12x-7)-(4x+3)}{2}=4x-5$; *b)* Suma lungimilor oricăror două laturi trebuie să fie mai mare decât a treia latură. Rezultă că $(4x-5)+(4x-5)>4x+3$, deci $x>\frac{13}{4}>3$.

21. *a)* $1-a^5$; *b) i)* $aS-S=(a+a^2+...+a^{n+1})-(1+a+...+a^n)=a^{n+1}-S\Rightarrow S=\frac{a^{n+1}-1}{a-1}$;

ii) $aS'-S'=(a+2a^2+3a^3+...+na^n)-(1+2a+3a^2+...+na^{n-1})=na^n-(1+a+...+a^{n-1})$.

Folosind *ii)* avem $1+a+a^2+...+a^{n-1}=\frac{a^n-1}{a-1}$ şi concluzia se obţine cu uşurinţă. **22.** *a)* Avem $\left(\sqrt{2}+1\right)^{-2}=\frac{1}{\left(\sqrt{2}+1\right)^2}=\left(\sqrt{2}-1\right)^2=3-2\sqrt{2}=a+b\sqrt{2}$. Rezultă că $a=3$ şi $b=-2$.

b) $\left(3-2\sqrt{2}\right)^5=\left[\left(\sqrt{2}-1\right)^2\right]^5=\left(\sqrt{2}-1\right)^{10}=\frac{1}{\left(\sqrt{2}+1\right)^{10}}<\frac{1}{2^{10}}=\frac{1}{1024}<\frac{1}{1000}=0{,}001$.

23. *a)* Cum $a+a+b+c=0$, rezultă că $a+b+c=-a$. Înmulţind ultima relaţie cu a, obţinem $a^2+ab+ac=-a^2\leq 0$. *b)* Relaţia de la *a)* este echivalentă cu $4a^2+4ab+b^2+4ac-b^2\leq 0$, adică $0\leq(2a+b)^2\leq b^2-4ac$.

1.8. Formule de calcul prescurtat

1. *a)* x^2+2x+1; *b)* x^3-6x+9; *c)* $a^2x^2+2ax^3+x^4$; *d)* $4a^2-12ay^2+9y^4$; *e)* $16x^4+40x^3y+25x^2y^2$; *f)* $\frac{9}{4}a^4+3a^2x^3+x^6$; *g)* $0{,}004x^2-2axy+25a^2y^2$; *h)* $9x^2+6\sqrt{2}x+2$. **2.** *a)* $4x$; *b)* $6a$; *c)* x^2; *d)* x^4; *e)* $49x^2-70x+25$; *f)* $9x^2$; *g)*; *h)*; *i)*. **3.** *a)* $(100+3)^2=10609$; *b)* $(100-1)^2=9801$; *c)* $(200+1)^2=40401$; *d)* $(50-1)^2=2401$. **4.** *a)* $49-a^2$; *b)* $9-25x^2$; *c)* x^2-12; *d)* $16-9x^4y^2$; *e)* $4-a^4b^4$; *f)* $\frac{9}{25}x^2-1$. **5.** *a)* $(40+3)\cdot(40-3)=1591$; *b)* $(60-5)(60+5)=3575$; *c)* $(200-3)(200+3)=39991$; *d)* $(100+1)(100-1)=9999$. **6.** *a)* a^3+3a^2+3a+1; *b)* $a^6-3a^4+3a^2-1$; *c)* $x^3+6x^2+12x+8$; *d)* $8a^3x^6+12a^2x^4+6ax^2+1$; *e)* $y^3+3y^2\sqrt{2}+6y+2\sqrt{2}$; *f)* $8x^3+36x^2y+54xy^2+27y^3$; *g)* $125x^3+75ax^2+15a^2x+a^3$; *h)* $x^3-6x^2y+12xy^2-8y^3$.

Scanned with OKEN Scanner

7. *a)* $a^2+b^2+2ab+2a+2b+1$; *b)* $4x^2+y^2+z^2+4xy+4xz+2yz$; *c)* $4x^2+y^2+9z^2+4xy+12xz+6yz$; *d)* $16a^2+9b^2+24ab+40a+30b+25$; *e)* $9x^2+4y^2++12xy+6x+4y+1$; *f)* $m^2+9n^2+25p^2+6mn+10mp+30np$. **8.** *a)* $a^2+b^2+c^2+2ab-2bc-2ca$; *b)* $x^2+y^2+z^2-2xy+2xz-2zy$; *c)* $x^2+y^2+z^2-2xy-2xz+2yz$; *d)* $4a^2+9b^2-12ab+4a-6b+1$; *e)* $4x^2+y^2+-4xy+4x-2y+1$; *f)* $4m^2+n^2+9p^2-4mn+6np-12pm$. **9.** *a)* a^3+8 ; *b)* x^3-1 ; *c)* x^3+125 ; *d)* y^3-27 ; *e)* x^6+y^9 ; *f)* x^3-8n^3 . **10.** *a)* x^3+z^3 ; *b)* $\frac{8}{27}-m^3$; *c)* $8x^3+27$; *d)* $3\sqrt{3}-343a^3$; *e)* $\frac{8}{125}+\frac{27}{8}x^3$; *f)* x^6-9y^3 . **11.** *a)* A; *b)* A; *c)* A; *d)* F.

12. *a)* $a^4+x^4+4ax^3+4a^3x+6a^2x^2$; *b)* $a^4+y^4-4ay^3-4a^3y+6a^2y^2$; *c)* $16a^4+x^4+8ax^3+32a^3x+24a^2x^2$; *d)* $81a^4+16b^8-96ab^6-216a^3b^2+216a^2b^4$. **13.** *a)* x^4-81 ; *b)* $2401-x^4$. **14.** *a)* 9; *b)* $4a^2+20a+25$; *c)* $11-a^2$; *d)* $\frac{149}{2}$; *e)* 47. **15.** *a)* 4 ; *b)* 0.

16. *a)* $100x^2+20xy+y^2$; *b)* $\overline{a5}^2-25=(10a+5)^2-25=100a^2+100a \vdots 100$. **17.** *a)* $(2k)^2=4k^2$, $(2k+1)^2=4k^2+4k+1$; *b)* Conform relațiilor de la punctul *a)*, prin împărțirea la 4 pătratele perfecte dau fie restul 0 fie restul 1; *c)* Se aplică rezultatul de la punctul anterior, $111151=M_4+3$. **18.** *a)* $(3k)^2=9k^2$, $(3k+1)^2=9k^2+6k+1$, $(3k+2)^2=9k^2+12k+4$; *b)* Conform relațiilor de la punctul *a)*, prin împărțirea la 3 pătratele perfecte dau fie restul 0 fie restul 1; *c)* Se aplică rezultatul de la punctul anterior, $1111121=1111119+2=M_3+2$.

19. *a)* $(7k)^2=49k^2$, $(7k\pm1)^2=49k^2\pm14k+1$, $(7k\pm2)^2=49k^2\pm28k+4$, $(7k\pm3)^2=49k^2\pm42k+9$; *b)* Conform relațiilor de la punctul *a)*, prin împărțirea la 7 pătratele perfecte dau restul 0, 1, 2 sau 4; *c)* $a^2=M_7+r_1$, $b^2=M_7+r_2\Rightarrow a^2+b^2=M_7+(r_1+r_2)$, unde $r_1,r_2\in\{0;1;2;4\}$. Atunci a^2+b^2 se divide cu 7 dacă şi numai dacă $r_1+r_2=M_7$. Singura posibilitate este $r_1=0$, $r_2=0$, adică $a \vdots 7$ şi $b \vdots 7$. **20.** *a)* $2x+1$; *b)* Există $m=\frac{p-1}{2}\in\mathbb{N}$. Atunci, folosind *a)* avem $(m+1)^2-m^2=p$.

21. *a)* $2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)-(a^4+b^4+c^4)$; *b)* Conform punctului *a)*

$$S=\frac{1}{4}\cdot\sqrt{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}=\frac{1}{4}\cdot\sqrt{2\left(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\right)-\left(a^4+b^4+c^4\right)}$$

Obținem: *i)* $S=\frac{\sqrt{2}}{2}$; *ii)* $S=\frac{\sqrt{23}}{4}$; *iii)* $S=\frac{\sqrt{59}}{4}$; *iv)* $S=6$.

22. *a)* $x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2=23$; *b)* $x^3+\frac{1}{x^3}=\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(x^2+\frac{1}{x^2}-1\right)=5\cdot(23-1)=110$;

c) $x^4+\frac{1}{x^4}=\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)^2-2=23^2-2=527$; *d)* $x^8+\frac{1}{x^8}=\left(x^4+\frac{1}{x^4}\right)^2-2=277727$.

23. Substituind y obținem $E=\sqrt{2x^2}-\sqrt{2(x+1)^2}\overset{x>0}{=}\sqrt{2}x-\sqrt{2}(x+1)=-\sqrt{2}$.

24. *a)* $(m+n)^2+7^2$; *b)* $(5m+1)^2+(n+3)^2$; *c)* $(5m+n+3)^2+1^2$; *d)* $(m+n)^2+(m-n)^2$.

Scanned with OKEN Scanner

25. Suma a două pătrate este nulă dacă şi numai dacă acele pătrate sunt nule. Obţinem: ***a)*** $x=1$, $y=0$; ***b)*** $(5x+1)^2+y^2=0 \Rightarrow x=-\frac{1}{5}$, $y=0$; ***c)*** $(3x-1)^2+(y+2)^2=0 \Rightarrow x=\frac{1}{3}$, $y=-2$; ***d)*** $(x-y-1)^2+(x+y)^2=0 \Rightarrow x=\frac{1}{2}$, $y=-\frac{1}{2}$.

26. ***a)*** $\sqrt{(x-4)^2}+\sqrt{(y+3)^2}+(z-1)^2\le 0 \Rightarrow x=4$, $y=-3$, $z=1$; ***b)*** $\sqrt{5\cdot(x-2)^2+4}+\sqrt{(y+7)^2+1}+(z-5)^3\le 3 \Rightarrow x=2$, $y=-7$, $z=5$.

27. ***a)*** $E(x)=(2x-1)^2 \Rightarrow m=2$, $n=-1$, $p=0$; ***b)*** $E(x)=(x+3)^2+1 \Rightarrow m=p=1$, $n=3$; ***d)*** $E(x)=\left(x-\frac{5}{2}\right)^2-\frac{5}{4} \Rightarrow m=1$, $n=-\frac{5}{2}$, $p=-\frac{5}{4}$. **28.** ***a)*** 0; ***b)*** 2; ***c)*** −4; ***d)*** −4; ***e)*** 1; ***f)*** $\frac{3}{4}$; ***g)*** $-\frac{5}{4}$; ***h)*** $-\frac{9}{4}$. **29.** ***a)*** 0; ***b)*** −2; ***c)*** 6; ***d)*** 16; ***e)*** 1; ***f)*** $\frac{5}{4}$; ***g)*** $\frac{5}{4}$; ***h)*** $\frac{25}{12}$. **30.** ***a)*** $\left(a+\frac{1}{a}\right)^2=\left(a^2+\frac{1}{a^2}\right)+2=25 \Rightarrow a+\frac{1}{a}=\pm 5 \overset{a<0}{\Rightarrow} a+\frac{1}{a}=-5$; ***b)*** $\sqrt{21}$. **31.** ***a)*** Notând $a^2+a+1=t$, numărul dat este egal cu $(t-1)(t+1)+1=t^2$; ***b)*** Analog cu ***a)***, $t=2a^3+5a^2+a+1$; ***c)*** $t=a^2+a+6$; ***d)*** $t=a^4-3a^2+6$. **32.** Inegalităţile date sunt echivalente cu: ***a)*** $(a-3)^2\ge 0$; ***b)*** $\left(a-\frac{1}{a}\right)^2\ge 0$; ***c)*** $(a^2-10)^2\ge 0$; ***d)*** $(a^2-a)^2+(a-1)^2\ge 0$. **33.** ***a)*** Se efectuează calculele în ambii membri ai egalităţii; ***b)*** Rezultă din ***a)***, pentru că $(ax+by)^2\le(ax+by)^2+(ay-bx)^2$.

34. ***a)*** Calcul direct; ***b)*** Din ***a)*** rezultă $xy\le\frac{(x+y)^2}{4}$, de unde concluzia.

35. ***a)*** $a-2\sqrt{ab}+b=\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2\ge 0$; ***b)*** Inegalitatea dela ***a)*** este echivalentă cu $a+b\ge 2\sqrt{ab}$. Înmulţind ultima relaţie cu $\frac{\sqrt{ab}}{a+b}$, obţinem concluzia. **36.** ***a)*** Se efectuează calculele; ***b)*** Rezultă direct din *a*); ***c)*** În relaţia de la *b*) luăm $x=3$, $y=4$, $z=12$. **37.** ***a)*** Dacă x ar fi raţional, atunci şi x^2 ar fi raţional, în contradicţie cu ipoteza; ***b) i)*** Vezi Ex. 25, Cap. 1.1.; ***ii)*** Se aplică *a*); ***iii)*** Dacă $5+2\sqrt{6}$ ar fi raţional, atunci $\sqrt{6}=\frac{(5+2\sqrt{6})-5}{2}\in\mathbb{Q}$, fals; ***iv)*** $(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2=5+2\sqrt{6}\overset{iii)}{\in}\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\overset{a)}{\Rightarrow}\sqrt{2}+\sqrt{3}\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$.

38. ***a)*** Avem $\left(a^2+b^2\right)\cdot\left(x^2+y^2\right)=(ax-by)^2+(ay+bx)^2=(ay+bx)^2$; ***b)*** Relaţia este echivalentă cu $(3x-2y)^2=0$, deci $\frac{x}{y}=\frac{2}{3}$. **39.** ***a)*** $y=(a-b)^2-b^2$, unde $a-b\ne 0, b\ne 0$;

b) $x-y=2ab-b^2$; $x-y=2ab-b^2=a^2-(a-b)^2$, unde $a-b\ne 0, a\ne 0$;

c) $x^2-xy+y^2=a^4+b^4+a^2b^2+2ab^3+2a^2b^2-2a^3b=\left(a^2-ab+b^2\right)^2$, deci este pătratul unui număr natural.

1.9. Descompunerea în factori

1. ***a)*** $25\cdot(37+63)=25\cdot 100=2500$; ***b)*** −32000; ***c)*** 57; ***d)*** −77; ***e)*** 1; ***f)*** −89..

Scanned with OKEN Scanner

2. *a)* $7(x+y)$; *b)* $-5(x-y)$; *c)* $a(x+y)$; *d)* $a^2(m+n-x)$; *e)* $p(x^2+1+a)$; *f)* $(x+y)(a+b)$; *g)* $-9m^3(9+m)$; *h)* $\sqrt{3}(x+y)$; *i)* $\sqrt{2}(a-b)$; *j)* $a(m+n+x)$; *k)* $x(x-3+x^2)$; *l)* $20m(m^2-2m+3)$; *m)* $2a(2a-x+4a^2x^2)$; *n)* $(5-x)(7+x)$; *o)* $7x^2(y^2-2)$. **3.** *a)* $-4x(1+2y)$; *b)* $4x(x+1)$; *c)* $13x(1-2x)$; *d)* $3a^2b(3b+a)$; *e)* $3x(x-3+2x^2)$; *f)* $x(m-n)(11x-6)$; *g)* $8(1+2x+4x^2)$; *h)* $y^2(1-5y)$; *i)* $x^2(1+2x)$; *j)* $2\sqrt{3}x(2-y)$; *k)* $\sqrt{7}a^2(5+ab^3)$; *l)* $\sqrt{23}(1-5a^2)$; *m)* $15a(1-2ab)$; *n)* $11x^5(y+2)$; *o)* $-0,2x(x-3)$; *p)* $\frac{1}{3}(a+b)(5+x-14m)$; *q)* $\frac{31}{4}x^2\left(\frac{1}{2}-y^2+\frac{a}{3}-m\right)$.

4. *a)* $ac=1\Rightarrow a=c=1 \Rightarrow E=31$; *b)* $ab=101\Rightarrow\{a,b\}=\{1,101\}\Rightarrow a+b=102 \Rightarrow E=ab+c(a+b)=10403$; *c)* $b+c=1\Rightarrow\{b;c\}=\{0;1\}\Rightarrow bc=0 \Rightarrow E=a(b+c)+bc=1$.

5. *a)* $15ax(a+3ax-2)$; *b)* $43x(x-2a^2+x^2)$; *c)* $2\sqrt{3}x^2(x-2+8x^3)$; *d)* $(m+n)(1+8a-2x^2)$. **6.** *a)* $\overline{ab}+\overline{ba}=11(a+b)\vdots 11$; *b)* $\overline{abc}+\overline{bca}+\overline{cab}=111\cdot(a+b)\vdots 37$ pentru că $111\vdots 37$. **7.** *a)* $(a+b)(3-x)$; *b)* $(m+n)^2(a-b)$; *c)* $(x^2+y^2)(a^2+b^2)$; *d)* $(2m-1)^4$. **8.** *a)* $2(x+2)^2$; *b)* $-(a+b)(a+1)$; *c)* $3x(3x^2+2)$; *d)* $-3(x+1)(2x-3)$.

9. *a)* $(m^2+1)(4-a\sqrt{5})$; *b)* $(x^2+a+1)(11-y)$; *c)* $(a-x)(2-a^2)$; *d)* $-2y(1-2y)$; *e)* $(a+b+c)(3\sqrt{5}-a^2+x)$. **10.** *a)* $N=-n(7n+3)\in\mathbb{Z}$; *b)* $N=n+1\in\mathbb{Z}$.

11. *a)* $N=(5n-1)^2$; *b)* $N=(2n+1)^4$. **12.** *a)* $x=\sqrt{5}$; *b)* $x=\frac{4}{1+\sqrt{5}}=\sqrt{5}-1$; *c)* $x=\frac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}=-\sqrt{2}-\sqrt{3}$; *d)* $x=-3$. **13.** *a)* Ipoteza se scrie $(a-c)\sqrt{2}=(d-b)\sqrt{3}$. Dacă $a\neq c$ atunci avem $\sqrt{\frac{2}{3}}=\frac{d-b}{a-c}\in\mathbb{Q}$, fals! Analog pentru $b\neq d$; *b)* Folosind punctul anterior obținem $a=b$ și $2=-2b$, cu soluția $a=b=-1$. **14.** *a)* $(a+b)^2$; *b)* $(m-n)^2$; *c)* $(x+1)^2$; *d)* $(m+1)^2$; *e)* $(2a-1)^2$; *f)* $(3x+5)^2$; *g)* $(1+7x)^2$; *h)* $(2x-3)^2$; *i)* $(8-x)^2$; *j)* $(10x+y)^2$; *k)* $(8x-5y)^2$; *l)* $(6x^2-y)^2$; *m)* $(9+a^2x)^2$; *n)* $(7a-5b)^2$; *p)* $(11+ma)^2$; *q)* $(m-7n)^2$; *r)* $(2a-5bc)^2$; *s)* $(8a^2b+11)^2$. **15.** *a)* $(x+\sqrt{3})^2$; *b)* $(\sqrt{3}x+\sqrt{5})^2$; *c)* $(\sqrt{2}-x)^2$; *d)* $(x+\sqrt{2})^2$; *e)* $(\sqrt{5}-\sqrt{3}x)^2$; *f)* $(\sqrt{2}x+\sqrt{3})^2$; *g)* $(x-\sqrt{7})^2$; *h)* $(z-2\sqrt{5})^2$; *i)* $(2z\sqrt{5}+1)^2$. **16.** *a)* $(x^2+x+1)^2$; *b)* $(\sqrt{2}-x+3)^2$; *c)* $(1+2x+3a)^2$; *d)* $(11a^2-7x+3)^2$; *e)* $(2x+y+5)^2$; *f)* $(6x-2a-3b)^2$. **17.** *a)* $(a-b+5c+5d)^2$; *b)* $(x-a+y+b)^2$; *c)* $4(2x-y)^2$; *d)* $(x-y+5)^2$; *e)* $(3\sqrt{2}x-a)^2$. **18.** *a)* $(a+b)(a-b)$; *b)* $(a+5)(a-5)$; *c)* $(2+x)(2-x)$; *d)* $(8+5m)(8-5m)$; *e)* $(6x+y)(6x-y)$; *f)* $(6a+m^2)(6a-m^2)$; *g)* $(9x+5y)(9x-5y)$; *h)* $(5m+1)(5m-1)$; *i)* $\left(\frac{6}{11}x+7y\right)\left(\frac{6}{11}x-7y\right)$; *j)* $\left(\frac{7}{5}+a\right)\left(\frac{7}{5}-a\right)$; *k)* $\left(\frac{13}{5}x+2z^2\right)\left(\frac{13}{5}x-2z^2\right)$; *l)* $\left(\frac{2}{3}x+\frac{3}{10}y^4\right)\left(\frac{2}{3}x-\frac{3}{10}y^4\right)$; *m)* $(x+\sqrt{5})(\sqrt{5}-x)$; *n)* $(\sqrt{7}+x)(\sqrt{7}-x)$; *p)* $(x\sqrt{2}+\sqrt{3})(x\sqrt{2}-\sqrt{3})$; *r)* $(\sqrt{5}x+\sqrt{2})(\sqrt{5}x-\sqrt{2})$. **19.** *a)* $(215+15)(215-15)=46000$; *b)* 29200 ; *c)* 2 ; *d)* 110 . **20.** *a)* 24; *b)* 2. **21.** *a)* $(a^2+b^2)(a+b)(a-b)$; *b)* $(a^2+1)(a+1)(a-1)$; *c)* $(4+x^2)(2+x)(2-x)$; *d)* $(9+m^2)(3+m)(3-m)$; *e)* $(4x^2+9y^2)(2x+3y)(2x-3y)$; *f)*

Scanned with OKEN Scanner

$(4a^2+3)(2a+\sqrt{3})(2a-\sqrt{3})$; **g)** $(9x^2+5)(3x+\sqrt{5})(3x-\sqrt{5})$; **h)** $(9m^4+4)(3m^2+2)(3m^2-2)$. **22.** **a)** $p=(117-74)(117+74)$, nu este număr prim; **b)** $q=(n-1)(n+1)$ este număr prim doar dacă $n-1=1$ și $n+1$ este număr prim. Soluția: $n=2$. **23.** **a)** $(x+5)(x-1)$; **b)** $(3x-1)(x-1)$; **c)** $4(4x+1)(1-x)$; **d)** $4(5x+1)(3x-4)$; **e)** $(x^2+1)(1+8x-x^2)$; **f)** $x^2(x-3)(7-x)$. **24.** **a)** $(x+y+z)^2$; **b)** $(3+x+5y)^2$; **c)** $(m+2+7x)^2$; **d)** $(1+a+9x)^2$; **e)** $(2x+y+6z)^2$; **f)** $(10x+3y^2+1)^2$; **g)** $(x-a+1)^2$; **h)** $(20+x-a)^2$. **25.** **a)** $(a+b)^3$; **b)** $(x+1)^3$; **c)** $(2x+1)^3$. **26.** **a)** $(3a-b^2)^3$; **b)** $(4x-y)^3$; **c)** $(5x+y)^3$; **d)** $(m-10)^3$; **e)** $(x^2+2y)^3$; **f)** $(ax^2-5y)^3$. **27.** **a)** $6^2-5^2=(6+5)\cdot(6-5)=6+5$, și analog celelalte diferențe; **b)** $-S=100^2-99^2+98^2-97^2+\ldots+2^2-1^2=100+99+98+\ldots+1 \Rightarrow S=-\frac{100\cdot 101}{2}=-5050$. **28.** $(x+y+z)^2=4\Rightarrow|x+y+z|=2$. **29.** **a)** $(x-b)(x^2+bx+b^2)$; **b)** $(a+b)(a^2-ab+b^2)$; **c)** $(x-1)(x^2+x+1)$; **d)** $(x+2)(x^2-2x+4)$; **e)** $(3x-1)(9x^2+3x+1)$; **f)** $(5x-2)(25x^2-10x+4)$; **g)** $(m^2+n^2)(m^4-m^2n^2+n^4)$; **h)** $(m+n)(m-n)(m^4+m^2n^2+n^4)$. **30.** **a)** $(x+4y)^3$; **b)** $(10-11a)^3$; **c)** $(x^2+2y)^3$; **d)** $(ax^2-5y)^3$. **31.** **a)** $(a+2b)^3$; **b)** $(x+1)^3(x-1)^3$; **c)** $(5x+y)^3$; **d)** $(b-ax^2)^3$; **e)** $\left(1+\frac{5}{7}x\right)^3$; **f)** $\left(\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{5}y^3\right)^3$; **g)** $\left(10a^2-\frac{1}{2}x\right)^3$. **32.** **a)** $N=(n^2+n+1)(n^3-n^2+1)$ și fiecare factor este mai mare decât 1; **b)** $N=(n^2-n+1)(n^3+n^2-1)$ fiecare factor fiind mai mare decât 1. De exemplu, $n^2-n+1=n(n-1)+1\overset{n\geq 2}{\geq}3$. **33.** **a)** $(a+b)^2+2(a+b)=35$; **b)** $(a-b)^2-2(a-b)=15$; **c)** $a-b=3$; **d)** $(a+b+c)^2-3(a+b+c)=28$. **34.** **a)** $x(x+2)(x-2)$; **b)** $x(x+2)^2$; **c)** $x(x-2)(x^2+2x+4)$; **d)** $x(x+3)(x^2-3x+9)$; **e)** $3x(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})$; **f)** $x(2x+1)(2x-1)$; **g)** $x(x^2+4)(x+2)(x-2)$; **h)** $x(2x-1)(4x^2+2x+1)(2x+1)(4x^2-2x+1)$. **35.** **a)** $M=(n-1)\cdot n\cdot(n+1)$ este produsul a trei numere întregi consecutive. Cel puțin unul din factori este divizibil cu 2 și cel puțin unul din factori este divizibil cu 3, deci $M\vdots 6$; **b)** $N=(n-1)\cdot n\cdot(n+1)\cdot(n^2+1)$ și conform punctului anterior este divizibil cu 6. Mai trebuie arătat că $N\vdots 5$. Dacă niciunul dintre numerele $n-1$, n și $n+1$ nu se divide cu 5, atunci n este de forma $n=M_5+2$ sau $n=M_5+3$. În ambele cazuri are loc $n^2+1\vdots 5$. **36.** **a)** $(x+y)(a+b)$; **b)** $(3x-y)(7x+11)$; **c)** $(m+3)(x+2y)$; **d)** $(4m+5a)(3x-y^2)$; **e)** $(a^2+b^2)(6x+1)$; **f)** $(2m+n^2)(x^2+1)$. **37.** **a)** $(x+2)^2-3^2=(x-1)(x+5)$; **b)** $(x-7)(x+3)$; **c)** $(x+1)(x+3)$; **d)** $(x+1)(x-3)$; **e)** $(3x+1)^2-6^2=(3x+7)(3x-5)$; **f)** $(5x+7)(5x-3)$; **g)** $(x-10)^2-4=(x-8)(x-12)$; **h)** $(x-4)^2-25=(x+1)(x-9)$; **i)** $(x+13)(x+7)$; **j)** $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{3}{2}\right)^2=(x+2)(x-1)$; **k)**

Scanned with OKEN Scanner

$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{7}{2}\right)^2=(x+3)(x-4)$; *l)* $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{5}{2}\right)^2=(x+2)(x-3)$; *m)* $(x-2)(x-3)$; *n)* $(x+3)(x+10)$; *p)* $(x-7)(x-8)$; *r)* $(x-2)(x-5)$; *s)* $(x+5)(x+6)$; *t)* $(x+2)(x+11)$.

38. *a)* $(x+2)(x+4)$; *b)* $(x-1)(x-9)$; *c)* $(x-8)(x-12)$; *d)* $(x+1)(x-9)$; *e)* $(x-2)(x-12)$; *f)* $(x-2)(x-5)$; *g)* $(x-7)(x-8)$; *h)* $(x+3)(x+20)$; *i)* $(x-3)(x+20)$.

39. *a)* $(x+a)(x+m)$; *b)* $(x-4)(x-m)$; *c)* $(x+9)(x+\sqrt{5})$; *d)* $(x-b)(x-\sqrt{7})$; *e)* $(x+a)(x-5)$; *f)* $(x+9)(x+m)$. **40.** *a)* $(2x^2+3x+2)^2$; *b)* $t(t+3)+2=t^2+3t+2=(t+1)(t+2)$, unde $t=5x^2-6x$; *c)* $t(t+7)+12=(t+3)(t+4)$, unde $t=x^2-2xy+y$; *d)* $(t+2)\cdot t+1=(t+1)^2$, unde $t=7x^2-3x+9$; *e)* $t(t+10)+21=(t+3)(t+7)$, unde $t=x^3+2x^2+3x+5$.

41. *a)* $(a^2+2b^2)^2-(2ab)^2=(a^2+2b^2+2ab)(a^2+2b^2-2ab)$; *b)* $(2a^4+b^4+2a^2b^2)(2a^4+b^4-2a^2b^2)$; *c)* $(2a^2+b^4+2ab^2)(2a^2+b^4-2ab^2)$; *d)* $(a^2+b^2)^2-(ab)^2=(a^2+b^2+ab)(a^2+b^2-ab)$; *e)* $(a^2+b^4+ab^2)(a^2+b^4-ab^2)$; *f)* $(a^4+b^2)^2-(\sqrt{3}a^2b)^2=(a^4+b^2+\sqrt{3}a^2b)(a^4+b^2-\sqrt{3}a^2b)$; *h)* $(a^2+b^4-\sqrt{2}ab^2)(a^2+b^4+\sqrt{2}ab^2)$; *i)* $(a^8+b^8-\sqrt{2}a^4b^4)(a^8+b^8+\sqrt{2}a^4b^4)$.

42. $b+c=2-a$ şi $b^2+c^2+2bc+3(2a-1)=(b+c)^2+3(2a-1)=(a+1)^2\geq 0$.

43. $a=(x-1)\cdot x\cdot(x+1)\cdot(x+2)+24$ este divizibil cu 24 deoarece factorii produsului respectiv sunt patru numere întregi consecutive şi în mod obligatoriu unul din factori este divizibil cu 3 şi există doi factori divizibili cu 2 şi respectiv 4.

44. $P=(n^2+2+2n)(n^2+2-2n)$ şi $n^2+2-2n=(n-1)^2+1$ este mai mare decât 1 pentru orice $n\geq 1$. Aşadar P poate fi prim doar pentru $n=1$, pentru care se obţine $P=5$ care este număr prim.

45. *a)* $x^2+x+1=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}$, deci cea mai mică valoare a expresiei este $\frac{3}{4}$; *b)* $(x^2+x+1)(x^2-x+1)=x^4+x^2+1$. Notând $x^2=t$, valoarea minimă a expresiei iniţiale este egală cu valoarea minimă a expresiei t^2+t+1, când $t\geq 0$. Cum $t^2+t+1=\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}$ şi $t\geq 0$ rezultă că valoarea minimă se obţine pentru $t=0$, anume $V_{min}=1$.

46. *a)* $E(x)=(3x-1)^2-4\Rightarrow$ valoarea minimă este -4 care se obţine pentru $x=\frac{1}{3}\in\mathbb{R}$; *b)* $F(x)=(3x+1)^2-9\Rightarrow$ valoarea minimă este -9, care se obţine pentru $x=-\frac{1}{3}\in\mathbb{Q}$; *c)* $G(x)=(2x-3)^2-4$ dar $2x-3=0\Rightarrow x=\frac{3}{2}\notin\mathbb{Z}$, aşa că valoarea minimă se va obţine pentru una din cele două valori întregi care sunt cele mai apropiate de $\frac{3}{2}$. Avem $G(1)=-3$ şi $G(2)=-3$, deci valoarea minimă a expresie $G(x)$ este egală cu -3 ; *d)* $H(x)=(x^2-3)^2-1\Rightarrow$ dacă x ar fi orice număr real pozitiv atunci valoarea minimă ar fi obţinută pentru $x=\sqrt{3}$. Cum $1<\sqrt{3}<2$ şi $H(1)=3$ şi $H(2)=0$, rezultă că valoarea minimă a expresiei $H(x)$ pentru $x\in\mathbb{N}$ este egală cu 0. **47.** *a)*

Scanned with OKEN Scanner

$(a^2-b^2)^2=c^4\Rightarrow a^2-b^2=\pm c^2\Rightarrow a^2=b^2+c^2$ sau $b^2=a^2+c^2$; **b)** $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=0\Rightarrow a=b=c$; **c)** $(a-b)(b-c)(c-a)=0$; **d)** Fără a restrânge generalitatea putem considera $0<a\le b\le c$ şi deoarece a,b,c sunt laturile unui triunghi, avem $a+b>c$. Atunci $0<\sqrt{a}\le\sqrt{b}\le\sqrt{c}$ şi $\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2>a+b+2\sqrt{ab}>c=\sqrt{c}^2$, deci $\sqrt{a}$, $\sqrt{b}$ şi $\sqrt{c}$ pot fi lungimile laturilor unui triunghi. Inegalitatea $\sqrt{a}+\sqrt{b}>\sqrt{c}$ se justifică prin $(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2=a+b+2\sqrt{ab}>a+b>c=(\sqrt{c})^2$. **48. b)** $(a-7)^2+2(b-3)^2+(a+x+2)^2=0\Rightarrow a=7$, $b=3$, $x=-9$; **c)**; **d)** $(6x+1)^2+(7y-1)^2+(11-z)^2=0\Rightarrow x=-\frac{1}{6}$, $y=\frac{1}{7}$, $z=11$. **49. a)** $(x-y)^2\ge 0$; **b)** $(x+y)^2\ge 0$; **c)** $(x+3)^2\ge 0$; **d)** $(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\ge 0$; **e)** Scăzând $2(xy+yz+zx)$ se obţine inegalitatatea de la punctul anterior. **50. a)** $\left(\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2\ge 0$, sau se aplică inegalitatea mediilor; **b)** Inegalitatea mediilor, $\frac{\frac{x}{y}+\frac{y}{x}}{2}\ge\sqrt{\frac{x}{y}\cdot\frac{y}{x}}=1$; **c)** După efectuarea înmulţirii se obţine $\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)+\left(\frac{y}{z}+\frac{z}{y}\right)+\left(\frac{z}{x}+\frac{x}{z}\right)\ge 6$, adevărată folosind inegalitatea de la punctul anterior. **51. a)** Relaţia din enunţ este echivalentă cu $x\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)-y\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)\ge 0$, adică $\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)^2\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)\ge 0$, ceea ce este adevărat. **b)** Pentru oricare $k\in\mathbb{N}^*$ avem

$$\frac{1}{(k+1)\sqrt{k+1}+k\sqrt{k}}<\frac{1}{\sqrt{k(k+1)}\left(\sqrt{k+1}+\sqrt{k}\right)}=\frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{\sqrt{k(k+1)}}=\frac{1}{\sqrt{k}}-\frac{1}{\sqrt{k+1}}.$$

Însumând egalităţile obţinute pentru $k=\overline{1,n}$, obţinem concluzia. **51.** Relaţia din enunţ este echivalentă cu $\left(a^2+b^2+c^2\right)\left(a^2-b^2+c^2\right)\left(a^2+b^2-c^2\right)\left(-a^2+b^2+c^2\right)=0$.

Testul 1. 1. a) 0; **b)** $E(2)-F(2)+1=4=2^2$; **c)** $E(x)=(2x-1)^2\ge 0$; **d)** $[F(x)]^2:4=[2(2x-1)]^2:4=E(x)$; **e)** $G(n)=5(2n-1)^2$. **2. a)** $E\left(-\frac{1}{2}\right)=E\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{1}{16}$; **b)** $x^2-x-2=(x+1)(x-2)$; **c)** Folosind descompunerea de la punctul anterior obţinem $E(n)-1=(n-2)\cdot(n-1)\cdot n\cdot(n+1)$. Fiind produs a patru numere întregi consecutive, există cel puţin un factor divizibil cu 3 şi există un număr divizibil cu 4 şi altul divizibil cu 2. Rezultă că produsul este divizibil cu 24;
d) $E(n)=(n^2-n)(n^2-n-2)+1=(n^2-n-1)^2-1+1=(n^2-n-1)^2$.

Testul 2. 1. a) $E\left(\frac{1}{2}\right)=F\left(\frac{1}{2}\right)=0$; **b)** $E(4)\cdot F(4)=63\cdot 28=(7\cdot 3\cdot 2)^2$; **c)** $F(x)=x(2x-1)$; **d)** $E(x)-F(x)=(2x-1)(2x+1)-x(2x-1)=(2x-1)(x+1)$; **e)** Folosind descompunerea de la punctul anterior găsim singura soluţie întreagă $n=-1$. **2. a)** Valoarea minimă este egală cu -16 şi se obţine pentru $x=-\frac{5}{2}\in\mathbb{R}$; **b)** Cea mai mică valoare a expresiei $(2n+5)^2$ pentru $n\in\mathbb{N}$ este egală cu 5 ($n=0$), deci valoarea minimă a expresiei pentru $n\in\mathbb{N}$ este egală cu -11; **c)** $E(n)=(2n+1)(2n+9)$, ambii factori fiind mai mari decât 1; **d)** Deoarece

Scanned with OKEN Scanner

$|E(m)| = |2m+1| \cdot |2m+9|$, înseamnă că dacă $|E(m)|$ este număr prim atunci $2m+1 = \pm 1$ sau $2m+9 = \pm 1$. Analizând aceste situații găsim că $|E(-1)| = 7$ este număr prim.

1.10. Rapoarte de numere reale reprezentate prin litere. Amplificarea. Simplificarea.

1. *a)* $x = 0$; *b)* $x = 0$; *c)* $x = 1$; *d)* $x = 1$; *e)* $x = -1$; *f)* $x \in \{0;2\}$; *g)* $x \in \{-2;0\}$; *h)* $x \in \{-3;3\}$; *i)* Nu există valori pentru care expresia să nu fie definită; *j)* $x \in \{-\sqrt{5};0;\sqrt{5}\}$.

2. *a)* -1; *b)* $-\frac{2\sqrt{2}}{3}$; *c)* $-\frac{4}{5}$; *d)* $\frac{\sqrt{3}}{2}$; *e)* $\frac{4}{5}$. **3.** *a)* $\frac{45}{99}$; *b)* $\frac{5}{3\sqrt{5}}$; *c)* $\frac{x^2}{x^2+x}$; *d)* $\frac{-2x^2}{-2x^3-2x}$; *e)* $\frac{x^2-1}{x^2+x}$.

4. *a)* $\frac{2x-4}{3x-6}$; *b)* $\frac{x^2-2x}{x^2-4x+4}$; *c)* $\frac{x^2-4}{x^2-4x+4}$; *d)* $\frac{2x^4-4x^3}{x^3-2x^2+x-2}$; *e)* $\frac{x^2-3x+2}{x^3-2x^2+2x-4}$. **5.** *a)* $\frac{3}{5}$; *b)* $\frac{\sqrt{2}}{2}$; *c)* $\frac{2}{3x}$; *d)* $\frac{x^2}{x+1}$; *e)* $\frac{1}{x}$. **6.** *a)* x; *b)* $\frac{x+1}{2x}$; *c)* $\frac{x+3}{x-3}$; *d)* $\frac{7x+1}{(x+2)(x+3)}$. **7.** *a)* $\frac{1}{2}$; *b)* $\frac{1}{3x}$; *c)* $\frac{4xy}{3z^3}$; *d)* $\frac{3x}{5y}$; *e)* $4xy$. **8.** *a)* $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1;0\}$, $\frac{5}{3x(x+1)}$; *b)* $x \in \mathbb{R} \setminus \{-5;0\}$, $\frac{1}{3(x+5)}$; *c)* $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2;2\}$, $\frac{1}{x+2}$; *d)* $x \in \mathbb{R} \setminus \{-4;4\}$, $4-x$; *e)* $x \in \mathbb{R} \setminus \{0;2\}$, $\frac{4(x-2)}{3x}$; *f)* $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2,0\}$; $\frac{x(2-x)}{(x+2)^2}$; *g)* $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, $\frac{x+1}{x-1}$; *h)* $x \in \mathbb{R} \setminus \{-3;3\}$, $\frac{x+3}{x-3}$. **9.** *a)* $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2\}$, $\frac{x-2}{x+2}$; *b)* $x \in \mathbb{R} \setminus \{3\}$, $\frac{x+3}{x-3}$; *c)* $x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$, $\frac{x+2}{x-2}$; *d)* $x \in \mathbb{R} \setminus \{0;3\}$, $\frac{x+3}{x-3}$; *e)* $x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$, $\frac{x(x+2)}{x-2}$; *f)* $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{5}{2};\frac{5}{2}\right\}$, $\frac{2x+5}{2x-5}$; *g)* $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2;2\}$, $\frac{x^2+4}{x^2-4}$; *h)* $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1;0\}$, $\frac{x+1}{2x}$; *i)* $x \in \mathbb{R} \setminus \{0;1\}$, $\frac{x-1}{3x}$; *j)* $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2\}$, $\frac{4x(x-2)}{(x+2)^2}$; *k)* $x \in \mathbb{R} \setminus \{-3;0;3\}$, $\frac{(x-3)^2}{4(x+3)}$; *l)* $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1;1\}$, $\frac{2x}{x^2-1}$. **10.** *a)* $x = 0$; *b)* $x = 3$; *c)* $x = -4$; *d)* $x \in \{-5;0\}$; *e)* $x \in \{0;1\}$; *f)* $x \in \left\{-\frac{3}{2};\frac{3}{2}\right\}$; *g)* $x = 2$; *h)* $x \in \{-1;0;1\}$; *i)* $x \in \{2;6\}$; *j)* $x \in \{-3;7\}$; *k)* $x \in \{-2;0;7\}$; *l)* $x \in \{-2;0;7\}$; *m)* $x = -2$; *n)* $x \in \{-6;4;5\}$. **11.** *a)* $-\frac{1}{2}$; *b)* $-\frac{1}{5}$; *c)* $-\frac{2+\sqrt{3}}{4}$; *d)* 0; *e)* $-\frac{6}{25}$; *f)* $\frac{\sqrt{3}}{8}$. **12.** *a)* $a, x \in \mathbb{R}^*$, $\frac{7a}{ax}$ și $\frac{12x}{ax}$; *b)* $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1;1\}$, $\frac{2x-2}{x^2-1}$ și $\frac{3x+3}{x^2-1}$; *c)* $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1;0\}$, $\frac{12x+12}{3x(x+1)}$, $\frac{x+1}{3x(x+1)}$ și $\frac{6x}{3x(x+1)}$; *d)* $x \in \mathbb{R}^*$, $\frac{90}{30x}$, $\frac{6ax}{30x}$ și $-\frac{25}{30x}$; *e)* $x \in \mathbb{R} \setminus \{0;1\}$, $\frac{7x(x-1)}{x(x-1)^2}$ și $\frac{-2x^2+3x}{x(x-1)^2}$; *f)* $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{5}{2};0;\frac{5}{2}\right\}$, $\frac{8x^2+20x}{4x^3-25x}$ și $\frac{2x^2-27x+55}{4x^3-25x}$.

13. *a)* $a, b \in \mathbb{R}^*$, $\frac{28x^2yb^2}{12a^2b^3}$, $\frac{15bx}{12a^2b^3}$, $\frac{-2a^3}{12a^2b^3}$; *b)* $a, x \in \mathbb{R}^*$ și $|x| \neq |a|$, $\frac{2x(a+x)}{ax(a-x)(a+x)}$, $\frac{a^2(a-x)}{ax(a-x)(a+x)}$, $\frac{ax(x+1)}{ax(a-x)(a+x)}$. **14.** *a)* $x \in \mathbb{R}^*$, $\frac{1}{3}$; *b)* $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1;0\}$, $\frac{5x}{x+1}$; *c)* $x \in \mathbb{R}^*$, $\frac{4x-3}{15x^2}$; *d)* $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{0;\frac{1}{2}\right\}$, $\frac{13}{2x-1}$; *e)* $a \in \mathbb{R}^*, x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{3}{2}\right\}$, $\frac{1}{5a}$; *f)* $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{0;\frac{3}{2}\right\}$, $\frac{2x-3}{3x}$; *g)* $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{3}{2}\right\}$, $\frac{2x+3}{2x-3}$; *h)* $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{3}{2}\right\}$, $\frac{7x}{5}$. **15.** *a)* $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2;0\}$, $\frac{2}{3x}$; *b)* $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1;0;1\}$, $\frac{3x+3}{7x-7}$; *c)* $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, $\frac{x-1}{2}$; *d)* $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{3};-6\right\}$, $\frac{2x-1}{3x-1}$; *e)* $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{2}{5};1\right\}$, $\frac{x+3}{x-1}$; *f)* $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, $\frac{11x}{x-1}$; *g)* $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, $\frac{3x}{x+1}$; *h)* $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1;0;3\}$, $\frac{x+3}{x+1}$; *i)* $x \in \mathbb{R} \setminus \{0;6\}$, $\frac{x+6}{2x-12}$; *j)*

Scanned with OKEN Scanner

$x\in\mathbb{R}\setminus\{-2/2\}$, $x-2$; **k)** $x\in\mathbb{R}\setminus\{5\}$, $\frac{3x^2-15x}{x^2+5x+25}$; **l)** $x\in\mathbb{R}\setminus\{-1;0\}$, $\frac{x+1}{4x}$. **16. a)** $\frac{3x-1}{x+7}$, $x\in\mathbb{R}\setminus\{-7;7\}$; **b)** $\frac{x-8}{x-3}$, $x\in\mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{1}{2};3\right\}$; **c)** $\frac{x+7}{3x-2}$, $x\in\mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{1}{6};\frac{2}{3}\right\}$; **d)** $\frac{x+1}{x-1}$, $x\in\mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{9}{4};1\right\}$; **e)** $\frac{x+5}{x-2}$, $x\in\mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{1}{9};2\right\}$; **f)** $\frac{x+1}{2x-3}$, $x\in\mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{2}{7};\frac{3}{2}\right\}$; **g)** $\frac{x+1}{x-3}$, $x\in\mathbb{R}\setminus\{-3;1;3\}$; **h)** $\frac{x-2}{2x-5}$, $x\in\mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{5}{2};-2;\frac{5}{2}\right\}$; **i)** $\frac{3x+5}{2x+7}$, $x\in\mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{7}{2};-1;1\right\}$; **j)** $\frac{x+7}{x-2}$, $x\in\mathbb{R}\setminus\{-3;2;3\}$; **k)** $\frac{x+3}{6x+1}$, $x\in\mathbb{R}\setminus\left\{-2;-\frac{1}{6};2\right\}$; **l)** $\frac{x+2}{3x}$, $x\in\mathbb{R}\setminus\{0;2\}$. **17. a)** $\frac{1}{11x(x-y)}$; Condiții: $|x|\neq|y|$, $a+b\neq 0$, $x\neq 0$; **b)** $\frac{1}{x^2-xy+y^2}$; Condiții: $x+y\neq 0$, $m+n\neq 0$. Nu se impune și condiția $x^2+xy+y^2\neq 0$ deoarece aceasta este asigurată de condiția $x+y\neq 0$. **18. a)** $\frac{3}{x-4}$, $x\in\mathbb{R}\setminus\left\{-4;-\frac{2}{5};4\right\}$; **b)** $\frac{-3x+y+5}{3x+y+5}$; Condiții: $3x-y+5\neq 0$, $3x+y+5\neq 0$; **c)** $\frac{8x^2+2x-3}{9(2x+1)}$, $x\neq-\frac{1}{2}$; **d)** $\frac{x+6}{x-1}$, $x\in\mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{4}{3};1\right\}$; **e)** $\frac{a+x+1}{3x}$; Condiții: $x\neq 0$, $a-x-1\neq 0$; **f)** $\frac{a+2b}{2(a-b)}$; Condiții: $a\neq b$, $3a+b\neq 0$. **19. a)** $\frac{a+b+c}{x-y}$; Condiții: $x\neq y, a+b+c\neq 0$; **b)** $\frac{x-y-5z}{x+y-5z}$; $x+y-5z\neq 0$. **20. a)** $\frac{x+2}{3-x}$; $x\neq 3$; **b)** $\frac{x+3}{x-3}$; $x\in\mathbb{R}\setminus\{-2;-1;3\}$; **c)** $\frac{3x+1}{7x-1}$; $x\in\mathbb{R}\setminus\left\{-2;\frac{1}{7};2\right\}$.

21. a) $\frac{a+b+1}{3a}$, $a\neq 0$, $a+b+1\neq 0$; **b)** $\frac{5a}{a-b-1}$, $a-b-1\neq 0$; **c)** $\frac{(a+b+1)^2}{a+b-1}$, $a+b\neq\pm 1$; **d)** $\frac{4}{5a+3}$, $a\in\mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{3}{5};2\right\}$; **e)** $x+1$. Condiție: Dacă n este număr par, atunci $x\neq -1$.

22. a) x^2+2x+3; Nu se impune nici o condiție; **b)** $\frac{x^2+3x-6}{x^2+3x+2}$; Condiții: $x\neq -2$, $x\neq -1$ și $x^2+3x-6\neq 0$; **c)** 1; $x\in\mathbb{R}\setminus\{3;4\}$; **d)** $\left(\frac{x-2}{x-4}\right)^2$; $x\in\mathbb{R}\setminus\{1;4\}$; **e)** $\left(\frac{x-4}{x+3}\right)^2$; $x\in\mathbb{R}\setminus\{-3;2\}$; **f)** $\left(\frac{x-3}{x+3}\right)^2$, $x\in\mathbb{R}\setminus\{-4;-3\}$. **23. a)** $D=\mathbb{R}-\{-2;-1\}$; **b)** $E(x)=\frac{x-1}{x+2}$; $A=\{-5;-3;1\}$; **c)** $B=\left\{-\frac{13}{2}\right\}$. **24.** $F(a)-5=(a+1)^2\Rightarrow\frac{1}{F(a)-5}=\frac{1}{(a+1)^2}>0$ pentru orice $a\in\mathbb{R}-\{-1\}$.

25. $E(x)=\frac{x+5}{x-5}$; $\frac{x+5}{x-5}=\pm\frac{1}{2}\Rightarrow A=\left\{-15;-\frac{5}{3}\right\}$.

1.11. Operații cu rapoarte de numere reale reprezentate prin litere

1.11.1. Adunarea și scăderea.

1. a) $\frac{4a}{5}$; **b)** $\frac{3}{7}$; **c)** $\frac{2x+1}{x}$; **d)** $\frac{8}{x^2+1}$; **e)** 1; **f)** $\frac{4a-3}{a+5}$; **g)** $\frac{19x}{9}$; **h)** $\frac{4x-3}{8}$; **i)** $\frac{4}{21}$; **j)** $\frac{20x+15}{33}$; **k)** $\frac{3x+17}{6}$; **l)** $\frac{x^2-x-1}{x^2+x}$. **2. a)** 0; **b)** $\frac{6x-9}{x^2-3x}$; **c)** $\frac{20x+9}{15x+15}$; **d)** $\frac{55}{6x+6}$; **e)** $\frac{x^2+3x-2}{x^2-4}$; **f)** $\frac{10x^2+9x}{4x^2-9}$; **g)** $\frac{4x^2+28x-26}{x^2+7x}$; **h)** $\frac{11x-6}{x^2-4}$. **3. a)** $\frac{2\sqrt{2}}{5x}$; **b)** $\frac{3x-2}{x^2-5x+9}$; **c)** $\frac{1}{3xy^2}$; **d)** $\frac{14-7x}{6x(x-3)}$; **e)** $\frac{2x+4}{x+6}$; **f)** $\frac{3-2x}{21}$; **g)** $\frac{5x+4}{47}$; **h)** $\frac{x+8}{x^2+x}$. **4. a)** $-\frac{2a}{15}$; **b)** $\frac{3a+1}{10a}$; **c)** $\frac{1-2x}{x^2+x}$; **d)** $\frac{4x+5}{3x(x+1)}$; **e)** $\frac{12x^3-10x^2-x+36}{3x(2x-7)(5-x)}$; **f)** $\frac{16x^2-x-8}{10x}$; **g)** $\frac{x^2+14x-2}{x^2-1}$; **h)** $\frac{x^2-14x+4}{5(x+3)}$; **i)** $\frac{-4x^2-4x+8}{x^2-9}$; **j)** $\frac{-2x^2-13x+19}{4x(x-2)(x+3)}$; **k)**

Scanned with OKEN Scanner

$\frac{4-8x}{7x(x+2)(5x-1)}$. **5.** *a)* $\frac{12x-2}{11x}$; *b)* $\frac{8\sqrt{3}}{3a}$; *c)* $\frac{2x-6}{a+y}$; *d)* $\frac{11x-21}{5x(x^2+b)}$; *e)* $\frac{-3x^2+7x+7}{(2x+1)(3y-x)}$; *f)* $\frac{1}{x(a+b+x)}$; *g)* $\frac{10x-6}{(3x+7)(6x-5)}$. **6.** *a)* $\frac{x-1}{2x}$; *b)* $\frac{1-x}{2x-3}$; *c)* $\frac{-5x-7}{4x+1}$; *d)* $\frac{11x^2-5x+1}{5x(x+1)}$; *e)* $\frac{27x-31}{(x+3)(5x-1)}$; *f)* $\frac{4x^2+110x-25}{11x(2x-5)(2x+5)}$; *g)* $\frac{9x-y}{x(y-x)}$; *h)* $\frac{28x-41}{(x+4)(3x-5)}$; *i)* $\frac{3x+96}{5(x+6)(2x-1)}$; *j)* $\frac{x^2-x-4}{(x+2)(x+1)}$; *k)* $\frac{4x-11}{5x(x^2-4)}$; *l)* $\frac{3-25x}{9x(x+1)^2}$.

7. *a)* $\frac{4x}{7}$; *b)* $\frac{2x+3}{11}$; *c)* $\frac{3x+2}{x}$; *d)* $\frac{x\sqrt{2}-3}{x+1}$; *e)* $\frac{14\sqrt{2}-2x\sqrt{2}}{x(x+5)}$; *f)* $\frac{3}{x+y}$; *g)* $\frac{4x+5}{4x(x-1)}$; *h)* $\frac{\sqrt{6}}{7x+x^2}$.

8. *a)* $\frac{10x-5}{x^2-4}$; *b)* $\frac{x^2+x-5}{(x-2)(x-1)^2}$; *c)* $\frac{3x^2+2x+14}{9x^2-25}$; *d)* $\frac{7x^2-x-1}{x^3-1}$; *e)* $\frac{5x^2-16x-42}{x^2(x^2-36)}$; *f)* $\frac{11x^2+7x-12}{(2x+3)(x-6)}$; *g)* $\frac{20}{x^3-36x}$. **9.** *a)* $\frac{x-1}{5x}$; *b)* $\frac{2x}{x+11}$; *c)* $\frac{4-5x}{x(2x+3)}$; *d)* $\frac{2x-3}{2x(x-1)}$. **10.** *a)* $\frac{12-2x}{4x+x^2}$; *b)* $\frac{1-7x}{6x^2-2x}$; *c)* $\frac{-25}{(3x-5)(x+6)}$; *d)* $\frac{-5x^2-40x+48}{5x^2(x^2-9)}$; *e)* $\frac{-4x^3+16x^2-3x-3}{24x(x^2-16)}$; *f)* $\frac{7x^2-5x-7}{2x(7x-5)}$; *g)* $\frac{-13x^2-158x+38}{13x(4x-7)}$. **11.** *a)* $\frac{x^3+6x^2+9x+11}{x(x+1)^2}$; *b)* $\frac{5x^2-39}{x^4-16}$; *c)* $\frac{-3x^2-17x+147}{9x^3-49x}$; *d)* $\frac{2x^2+3x-1}{(x-1)(x+2)(x+3)}$. **12.** *a)* $\frac{1}{abc}$; *b)* $\frac{3y-x+2xy}{xy(x+y)}$; *c)* $\frac{xy-3x^2-y^2}{y^3-x^3}$; *d)* $\frac{8a+7x-9}{2ax+2x^2}$; *e)* $\frac{2x^2+3x-2}{x^3+1}$; *f)* $\frac{3x+3y+2xy-2x^2-2y^2+1}{x^3+y^3}$; *g)* $-\frac{2x^2+7x+21}{x^3-36x}$. **13.** *a)* $\frac{3a^3+12a^2+32a+48}{a^4-16}$; *b)* $\frac{2xy-x^2-y^2+3}{x^3+y^3}$; *c)* $\frac{31x-126}{6x(x-3)(x-4)}$; *d)* $\frac{2y+5}{x^2-y^2}$; *e)* $\frac{-4x^3+2x^2+40x+16}{(x^2-4)(x^2-9)}$; *f)* $\frac{2x^3-78x^2+92x+11}{12x(x+8)(4x^2-9)}$. **14.** *a)* $x\in\{-3;3\}$; *c)* Folosind *b)*, $E(x)\in\mathbb{Z}\Rightarrow x+3\,|\,2x-6$. Se obține $x+3\,|\,12\Rightarrow x\in\{-15;-9;-7;-6;-5;-4;-2;-1;0;1;9\}$ (observație: se ține cont că $x\notin\{-3,3\}$).

15. *b)* Se aplică *a)*. $S_1=\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{a+1}\right)+\left(\frac{1}{a+1}-\frac{1}{a+2}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{a+2011}-\frac{1}{a+2012}\right)\Rightarrow S_1=\frac{2012}{a(a+2012)}$ și $S_2=\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k+1}\right)\Rightarrow S_2=\frac{2k}{2k+1}$. **16.** *a)* $y\in\{-1;1\}$; *c)* $\frac{7}{y^2-1}=\frac{3}{y-1}\Rightarrow 7=3(y+1)\Rightarrow y=\frac{4}{3}$; *d)* $4(y+1)\cdot E(y)=\frac{4}{y-1}\in\mathbb{Z}$, $y\in\mathbb{Z}-\{-1;1\}$ $\Rightarrow y\in\{-3;0;2;3;5\}$; *e)* $|y+1|\le 5\Rightarrow y\in[-6;-1)\cup(-1;1)\cup(1;4]$. **17.** *a)* $x=-1$; *b)* $E(x)=\frac{1}{x+1}\Rightarrow(x+1)\cdot E(x)=1$; *c)* $x=20$; *d)* $x\in\{-7;-4;-3;-2;0;1;2;5\}$; *e)* $\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{20\cdot 21}=\frac{1}{2}-\frac{1}{21}=\frac{19}{42}$. **18.** *a)* $D=\mathbb{R}-\{-3;-1;1\}$; *b)* $E(x)=-\frac{7}{x+1}$; *c)* $-\frac{7}{n+1}\in\mathbb{N}\Rightarrow n\in\{-8;-2\}$; *e)* $A=\left(-\frac{3}{2};-1\right)\cup\left(-1;-\frac{1}{2}\right)$. **19.** *a)* $x\in\{-2;-1;0;1\}$; *b)* $E(x)=\frac{x^2}{x^2-1}$; *c)* $x=\pm\frac{\sqrt{6}}{2}$; *d)* Folosim scrierea $E(k)=\frac{k^2}{(k-1)(k+1)}$. După simplificări obținem $P=\frac{2\cdot 2011}{2012}=\frac{2011}{1006}$; *e)* Folosim scrierea $E(2k)=1+\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}=1+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k+1}\right)$. Obținem $S=1006+\frac{1}{2}\cdot\left(1-\frac{1}{2013}\right)\Rightarrow\frac{S}{1006}=\frac{2014}{2013}$.

1.11.2. Înmulțirea, împărțirea, ridicarea la putere. Expresii cu toate operațiile

9. *a)* $\frac{1}{2}$; *b)* $3x-2$; *c)* $\frac{a+1}{2}$; *d)* 1; *e)* 10; *f)* $x-4$; *g)* $\frac{-2x-8}{4x-5}$. **10.** *a)* $\frac{11x+35}{2x}$; *b)* $x-3$; *c)* $\frac{-x^2+4x-1}{x-1}$; *d)* $\frac{-4x^3-11x^2+14x+42}{(x+6)(2x^2-7)}$; *e)* $\frac{5x+1}{x-2}$. **14.** *a)* $\frac{a+1}{a-1}$; *b)* $\frac{1}{a-b}$. **15.** *a)* $\frac{x+2}{5-y}$; *b)* $7x+42$; *c)*

Scanned with OKEN Scanner

$\frac{2x-5}{28}$; **d)** $\frac{(a-b)(x+1)}{a+b}$; **e)** $\frac{a^2\sqrt{7}(5x+1)}{2}$; **f)** $\frac{3}{2}$; **g)** $\frac{3x(a+b+c)}{(7x-5)(a+b-c)}$. **16. a)** $9x^2+6x+4$; **b)** $\frac{6}{a+1}$; **c)** $\frac{a-3}{a^3}$; **d)** $\frac{x^2+7x}{4x-5}$; **e)** $\frac{81}{2ay}$; **f)** $\frac{2}{b}$; **g)** $7x$. **17. a)** 1; **b)** $\frac{1}{x^6(x-1)^6}$; **c)** $(a+b)^2$; **d)** 2; **e)** $\frac{3}{25x^2}$; **f)** $\frac{x^5}{243a^5}$. **18. a)** $\frac{4}{x-2}$; **b)** $\frac{(1-3x)(3x-10)}{5x(3x+1)}$; **c)** $\frac{(b-a)^3}{(a+b)^3}$; **d)** $\frac{a^2}{b^2+ab-2}$; **e)** $8-x$; **f)** $\frac{-2x^3+x^2+8x-3}{2x-1}$.

19. a) $-\frac{8x+2}{4x+3}$; **b)** 1; **c)** 0; **d)** $\frac{4x^2-x-21}{4x+3}$; **e)** $\frac{8x}{x-4}$; **f)** $\frac{2x+3}{4x-12}$; **g)** $\frac{x+1}{2}$. **20. a)** $x\in\{-2;2\}$; **b)** $4x+2$; **c)** $x=\frac{11}{4}$. **21. a)** $x\in\{-1;1\}$; **b)** $E(x)=3$. **22. a)** $x\in\{0;3\}$; **b)** $\frac{3}{x-3}$; **c)** $a\in\{2;4;6\}$; **d)** $a\in\{2;4\}$. **23. a)** $\frac{4x+y+5}{4x+y-5}$; **b)** 6; **c)** $\frac{a+4}{a-1}$; **d)** $a\in\{0;2;6\}$. **24. a)** $E(x)=x(x-1)(x-2)(x+1)(x+2)$; Produsul oricăror cinci numere consecutive se divide cu 120 pentru că unul din factori se divide cu 4, altul se divide cu 2, de asemenea un factor se divide cu 3 şi un factor se divide cu 5; **c)** $x=-4$; **d)** $F(x)=\frac{1}{(x+1)(x+2)}=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}$

$\Rightarrow S=\frac{101}{102}$.

25. a) $x\in\{-2;-1;1\}$; **b)** $-\frac{7x}{2(x+1)}$; **c)** $x\in\{-8;0;6\}$; **d)** $[-2;-1)\cup(-1;1)\cup\left(1;\frac{8}{7}\right]$.

26. a) Deoarece $x^2-2x+3=(x-1)^2+2>0$ pentru orice $x\in\mathbb{R}$, înseamnă că $E(x)$ are sens pentru orice $x\in\mathbb{R}$; **b)** $x^2-2x+3\geq 2\Rightarrow 0<\frac{2}{x^2-2x+3}\leq 1$; **c)** Folosind *b)* rezultă că partea întreagă este egală cu 3 dacă $x\neq 1$ şi este egală cu 4 pentru $x=1$. **27. a)** $x=-\frac{3}{2}$; **b)** $\frac{4x-2}{2x+3}$; **c)** $E(x)\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow 2x+3\,|\,4x-2$. Rezultă că $2x+3\,|\,[2(2x+3)-(4x-2)]\Rightarrow 2x+3\,|\,8$, cu soluţiile întregi $x=-1$ şi $x=-2$. **28. a)** $x\in\{-1,0,2\}$; suma este 1; **b)** $A(x)=3x$; $x^2+2A(x)+9=(x+3)^2$; **c)** $3x\cdot(2-\sqrt{5})\in\mathbb{Q}$ dacă şi numai dacă $x=0$. Pentru $x=0$ expresia $A(x)$ nu are sens, deci nu există valori întregi ale lui x pentru care $A(x)\cdot(2-\sqrt{5})\in\mathbb{Q}$.

29. *a)* $E(101)=1+2+...+100+102+103+...+201=\frac{201\cdot 202}{2}-101=20200$; *b)* $E(0)=2(1+2+...+100)$ este număr par; *c)* Pentru orice $k\in\{1;2;...100\}$ avem $|a-k|=|-(a-k)|=|-a+k|$ şi analog $|a+k|=|-a-k|$. Rezultă că $E(a)$ şi $E(-a)$ sunt sume ale aceloraşi termeni, într-o altă ordine, deci sunt egale. **30.** $E(x)=5+\frac{6}{(x-2)^2+6}$ şi rezolvarea este analogă celei de la problema 26. *d)* $x=2$. **31. a)** $x\in\{0;5\}$; **b)** $\frac{3x-10}{x-5}$; **c)** $x-5\,|\,((3x-10)-3(x-5))\Rightarrow x-5\,|\,5$. Rezultă $x\in\{4;6;10\}$; *d)* $x=10$. **32. a)** $E(x)=\frac{2(x+4)}{x(x+1)}$; **b)** $\frac{213}{140}$; **c)** $x\in\{1,2,3\}$; se arată că $E(x)<1$ pentru $x\geq 4$. **33. b)** $E(x)=\frac{6x-5}{3x+2}$; **c)** $x=-1$. **34. a)** $E(x)=(x-3)(x-1)x(x+1)(x+3)$. Pentru $x=3k$ factorii $x-3$ şi $x+3$ sunt divizibili cu 3, iar ceilalţi trei factori fiind numere consecutive au produsul de asemenea divizibil cu 3. Rezultă că $E(x)\vdots 3^3$; **b)** $(x^2-4)E(x)$ este produsul a 7 numere naturale consecutive; Analog rezolvării problemei 24 se arată că acest produs se divide cu 840.

Scanned with OKEN Scanner

36. *a)* 17; *c)* $2(k+1)(2k^2+k+2)$. **37.** *a)* ; *b)* $S=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{2}{2\cdot 4}+\frac{3}{4\cdot 7}+\frac{4}{4\cdot 11}+\frac{5}{11\cdot 16}$; *c)* Folosind a) obținem $S=1-\frac{1}{16}<1$. **38.** *a)* $E(x)=\frac{(x+2)(x^2-3)}{(x+2)(x-2)}=\frac{x^2-3}{x-2}$; *b)* 2; *c)* $(n+3)^2$. **39.** *a)* $F(x)=\frac{x+3}{x-2}=1+\frac{5}{x-2}$; *b)* $x-2\,|\,5\Rightarrow x\in\{1;3;7\}$, dar $F(1)\in\mathbb{Z}-\mathbb{N}$, deci $x\in\{3;7\}$; *c)* $F(k\cdot(k+1)+2)=1+\frac{5}{k(k+1)}=1+5\cdot\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$. Se obține $S=2012+5\cdot\left(1-\frac{1}{2013}\right)$. **40.** *a)* $E(x)=4$; *b)* $a=4(x^2+x+1)>0$ deoarece $x^2+x+1=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0$. **41.** *a)* $F(x)=(x+2)(x+3)$; *b)* $F(x)$ este par deoarece este produsul a două numere naturale consecutive . **42.** *a)* $E(x)=\frac{x+1}{x-1}$; *b)* $x\in\{0;2;3\}$; *c)* $\frac{2}{100\cdot 101}$. **43.** *a)* $E(x)=\frac{x^2-x+4}{(x-1)^2}$; *b)* $x\in\mathbb{R}-\{-3;-1;1\}$; *c)* Dacă $\sqrt{E(n)}\in\mathbb{N}$, atunci $E(n)\in\mathbb{N}$, deci $(n-1)^2\,|\,n^2-n+4$. Rezultă și $n-1\,|\,n^2-n+4=n(n-1)+4$, deci $n-1\,|\,4$, de unde $n\in\{-3,-1,0,2,3,5\}$. Cum $n\notin\{-3,-1,1\}$, rezultă $n\in\{0,2,3,5\}$. Condiția $\sqrt{E(n)}\in\mathbb{N}$ este verificată doar de $n=0$.

44. *a)* $E(x)=\frac{1}{x(x+1)}+\frac{1}{(x+1)(x+2)}+\ldots+\frac{1}{(x+2010)(x+2011)}$; $x\in\mathbb{R}\setminus\{0;-1;\ldots;-2011\}$;

b) $E(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{x+2011}=\frac{2011}{x(x+2011)}$; *c)* $x=1$. **45.** *a)* $E(x,y)=(3x-4y+2)^2+4(y+1)^2+7$, deci $E(x,y)>0$; *b)* Avem $E(x,y)\geq 7$, cu egalitate pentru $3x-4y+2=y+1=0$. Rezultă că $x=-2$, $y=-1$. **46.** *a)* $S=5x^2+10y^2+2z^2-2xy-4xz-6yz-4x+2z+1003$; *b)* Din *a)* observăm că $E(x,y,z)=S+9$. Rezultă că $E(x,y,z)\geq 1011$, așadar valoarea minimă a expresiei este 1011. Ea se realizează pentru $x-\frac{1+z}{2}=x-y=z-3y=0$, adică pentru $x=-1$, $y=-1$, $z=-3$. **47.** *a)* $8x+6$; *b)* $E(n)=(4n+4)^2$; *c)* $E(x)=16(x+1)^2\,\vdots\,100\Rightarrow x+1\,\vdots\,5$. Cel mai mic număr natural care verifică este $x=4$; *d)* $F(x)=\frac{1}{16}\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}\right)\Rightarrow S=\frac{1}{16}\left(1-\frac{1}{102}\right)$. **48.** *a)* $x+y=\frac{2a(a^2+1)}{a^4+a^2+1}$; *b)* $\frac{1}{x}=\frac{a^2+a+1}{a}=a+\frac{1}{a}+1$ $\Rightarrow a+\frac{1}{a}=\frac{1}{x}-1$ și analog $a+\frac{1}{a}=\frac{1}{y}+1$; *c)* Folosind *b)* avem $\left(\frac{1}{x}-1\right)\left(\frac{1}{y}+1\right)=\left(a+\frac{1}{a}\right)^2$. Apoi, $\left(a+\frac{1}{a}\right)^2\geq 4$, deoarece se poate demonstra cu ușurință că pentru $a>0$ are loc $a+\frac{1}{a}\geq 2$, iar pentru $a<0$ avem $a+\frac{1}{a}\leq -2$. **49.** *a)* $x\in\left\{-\frac{37}{6};-\frac{5}{4};\frac{5}{4}\right\}$; *b)* $\frac{12x-5}{4x-5}$; *c)* $x=0$; *d)* $x=\frac{19}{10}$.

50. Fie $y=x+\frac{1}{x}$; atunci $x^2+\frac{1}{x^2}=y^2-2$ și putem scrie $a=\frac{1}{x^2+1+\frac{1}{x^2}}=\frac{1}{y^2-1}$, deci $y^2=\frac{a+1}{a}$. Atunci $E(x)=\frac{1}{x^4+1+\frac{1}{x^4}}=\frac{1}{\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)^2-1}=\frac{1}{(y^2-2)^2-1}=\frac{1}{(y^2-1)(y^2-3)}$ și, înlocuind $y^2=\frac{a+1}{a}$, rezultă $E(x)=\frac{a^2}{1-2a}$, care este număr rațional, întrucât a este rațional.

51. Avem $b+c\leq ax+b+c\leq a+b+c$, oricare ar fi $x\in[0;1]$, deci

Scanned with OKEN Scanner

$\frac{1}{a+b+c} \le \frac{1}{ax+b+c} \le \frac{1}{b+c}$, oricare ar fi $x \in [0;1]$. Analog, $\frac{1}{a+b+c} \le \frac{1}{a+bx+c} \le \frac{1}{a+c}$ și $\frac{1}{a+b+c} \le \frac{1}{a+b+cx} \le \frac{1}{b+a}$. Însumând cele trei relații, obținem concluzia. **52.** ***a)*** Inegalitatea din enunț este echivalentă cu $4 \cdot \left(a^2+ab+b^2\right) \ge 3 \cdot (a+b)^2$, sau $(a-b)^2 \ge 0$, ceea ce este adevărat; ***b)*** Din ipoteză deducem că $a^2+ab+b^2 \ge \frac{3}{4} \cdot (a+b)^2$, sau $\sqrt{a^2+ab+b^2} \ge \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot (a+b)$. Înlocuind, pe rând perechea (a,b) cu (x,y), (y,z) respectiv (z,x) și însumând relațiile obținute, rezultă concluzia. **53.** Numărul $\frac{1}{a} = \frac{x^2+x+1}{x} = x+1+\frac{1}{x}$ este rațional, deci $x+\frac{1}{x} = \frac{1}{a}-1 \in \mathbb{Q}$. Înseamnă că $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2 = \left(\frac{1}{a}-1\right)^2 \in \mathbb{Q}$, deci $x^2+\frac{1}{x^2} = \left(\frac{1}{a}-1\right)^2 - 2 \in \mathbb{Q}$. Avem $b = x^2-1-\frac{1}{x^2}$, deci $x^2-\frac{1}{x^2} = b+1 \in \mathbb{Q}$. Rezultă că $x^2 = c \in \mathbb{Q}$. Obținem că $a = \frac{x}{x^2+x+1} = \frac{x}{x+c+1}$, de unde $x(1-a) = a(c+1) \in \mathbb{Q}$. Dacă $x \notin \mathbb{Q}$, rezultă că $a = 1$, contradicție.

Testul 1. **1.** ***c)*** $E(x)+F(x)=1$; ***d)*** Folosim *c)*: $F(b) = 1-E(b) < 1-\frac{1}{2}$; ***e)*** $x = \pm 1$. **2.** ***d)*** $\frac{F(b)}{E(b)} = \frac{b^2-1}{b^2+1}$; Pentru $b>1$ avem și $b^2>1$. Atunci $0 < b^2-1 < b^2+1$, ceea ce implică $0 < \frac{b^2-1}{b^2+1} < 1$, adică $\frac{F(b)}{E(b)} \in (0;1)$.

Testul 2. **1.** ***a)*** $-\frac{\sqrt{3}}{2}$; ***c)*** $F(x) = -1+\frac{2}{1+x^2} \le 1$ deoarece $\frac{2}{1+x^2} \le 2$; ***e)*** Rezultă direct din *d)*. **2.** ***a)*** 5; ***b)*** $E(x) = \frac{(x^2+2x+2)(x^2-2x+2)}{x^2+2x+2} = x^2-2x+2$; ***c)*** $E(x) = (x-1)^2+1$, deci valoarea minimă este egală cu 1; ***d)*** $E(m)-m = (m-1)(m-2)$ este număr întreg par, fiind produsul a două numere întregi consecutive; În fine, constatăm că pentru orice $m \in \mathbb{Z}$, numărul $(m-1)(m-2)$ este natural, analizând cazul $m \le 1$, respectiv $m \ge 2$.

Testul 3. **1.** ***a)*** $\frac{1}{6}$; ***c)*** $\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{10}-\frac{1}{11}\right) = 1-\frac{1}{11}$; ***d)*** Se obține $n(n+1)(n+2)(n+3)$, care este un produs de 4 numere naturale consecutive. Dintre acestea, există două care dau resturile 0, respectiv 2 la împărțirea cu 4 și există unul divizibil cu 3. ***e)*** Inegalitatea de demonstrat este echivalentă cu $(n-1)(5n+6) \ge 0$, adevărată pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$. **2.** ***a)*** $\frac{7}{4}$; ***b)*** $(x+1)^2 > x \Leftrightarrow x^2+x+1 > 0 \Leftrightarrow \left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4} > 0$, adevărat; ***c)*** $E(x) = x^2-x+1$; ***d)*** $E(n) = n(n-1)+1$, iar $n(n-1)$ este număr par, ca produs a două numere naturale consecutive.

1.12. Probleme cu caracter aplicativ

1. Fie x prețul creionului; $x+3x = 4{,}8$; $x = 1{,}2$. **2.** $(x+12)+x = 44 \Rightarrow x = 16$; Numerele

Scanned with OKEN Scanner

sunt 16 şi 28. **3.** Fie x numărul de mere din coş; Primul copil primeşte $\frac{x}{4}$, în coş rămân $\frac{3x}{4}$. Al doilea copil primeşte $\frac{1}{4}\cdot\frac{3x}{4}=\frac{3x}{16}$, în coş rămânând $\frac{3}{4}\cdot\frac{3x}{4}=\frac{9x}{16}$. Al treilea copil primeşte $\frac{2}{3}\cdot\frac{9x}{16}=\frac{3x}{8}$; Atunci $\frac{x}{4}+\frac{3x}{16}+\frac{3x}{8}+12=x$; $x=64$. **4.** Fie x lăţimea dreptunghiului; $(x+2)(13-x-3)=x(13-x)$; $x=4$ cm; Aria $=36cm^2$. **5.** $3x-\frac{65-x}{2}=48$; $x=23$; Numerele sunt 23 şi 42. **6.** $3x=x+486\Rightarrow x=243$. **7.** Există două situaţii posibile: I) $A=C\Rightarrow x=18^o$, sau II) $B=C\Rightarrow x=12\frac{6}{7}$ grade. **8.** Notăm cu x distanţa parcursă în afară; $\frac{x}{60}+\frac{270-x}{50}=5$; $x=120\ km$. **9.** Numărul de iepuri şi numărul de zile sunt mărimi invers proporţionale: $\frac{11\cdot16}{8}=22$ zile. **10.** Fie x preţul iniţial; $x-\frac{15}{100}x=51\Rightarrow x=60$ lei.

11. Dacă x este numărul de pagini, atunci în prima zi citeşte $\frac{x}{4}$, rămânând $\frac{3x}{4}$. În a doua zi citeşte $\frac{1}{6}\cdot\frac{3x}{4}=\frac{x}{8}$ şi îi rămân $\frac{5}{6}\cdot\frac{3x}{4}=\frac{5x}{8}$, iar în a treia zi citeşte $\frac{3}{5}\cdot\frac{5x}{8}=\frac{3x}{8}$; $\frac{x}{4}+\frac{x}{8}+\frac{3x}{8}+42=x\Rightarrow x=168$ pagini. **12.** Fie x numărul apartamentelor cu două camere; $2x+(50-x)\cdot3=117$; $x=33$. **13.** $\frac{p}{100}\cdot\frac{46+23+51}{3}=6\Rightarrow p=15$. **14.** Notăm cu x numărul băncilor; $(x-3)\cdot3=2x+5\Rightarrow x=14$. **15.** Fie x numărul fetelor; avem: $2\cdot(x-3)=(x+7)+3\Rightarrow x=16$. Sunt 16 fete, 23 de băieţi, 39 de elevi. **16.** Fie a,b,c sumele elevilor şi fie x suma de bani rămasă fiecăruia. Avem $\frac{2}{3}\cdot a=x\Rightarrow a=\frac{3x}{2}$, şi analog, $b=\frac{4x}{3}$, $c=\frac{5x}{2}$; $\frac{3x}{2}+\frac{4x}{3}+\frac{5x}{2}=3200\Rightarrow x=600$; ***a)*** $a=900$ lei, $b=800$ lei, $c=1500$ lei; ***b)*** 300 lei, 200 lei, 900 lei. **17.** Numărul concurenţilor şi numărul armelor sunt numere naturale. Rezultă că numărul concurenţilor se divide cu 11 şi cu 12, astfel că, fiind mai mic decât 156, el nu poate fi decât 132. Trebuie totuşi să verificăm dacă $156-132=\frac{2}{11}\cdot132$, adevărat. Numărul premiaţilor este egal cu 11. **18.** ***a)*** $400-\frac{15}{100}\cdot400=340$ lei; ***b)*** Fie x procentul celei de a doua reduceri; atunci $340-\frac{x}{100}\cdot340=306\Rightarrow x=10$. **19.** Dacă x este numărul răspunsurilor corecte, atunci $10\cdot x-4\cdot(8-x)=38\Rightarrow x=5$. **20.** $5\cdot x^2+7x=34\Rightarrow x=2$. **21.** Fie x şi y preţul kilogramului de morcovi, respectiv de roşii. Atunci $2x+3y=15{,}5$ şi $x+4y=16{,}5$. Se obţine $x=2{,}5$ lei şi $y=3{,}5$ lei. **22.** Un muncitor execută zilnic $\frac{1}{13\cdot18}$ din întreaga lucrare. După 4 zile efectuaseră $\frac{4}{18}$ din lucrare, rămânând $\frac{14}{18}$ din aceasta. Cei 7 muncitori rămaşi execută zilnic $\frac{7}{13\cdot18}$, astfel că vor încheia lucrarea în $\frac{14}{18}:\frac{7}{13\cdot18}=26$ zile. **23.** Notând c, r şi p preţurile obiectelor respective, obţinem imediat că $r+p=6$, $c+r=3{,}5$ şi $c+p=6{,}5$. Atunci $c+2r+3p=(c+p)+2(r+p)=6{,}5+2\cdot6=18{,}5$. **24.** Cei trei copii au împreună $(395+355+326):2=538$ lei. Atunci primul copil are $538-355=183$, al doilea are $538-326=212$ iar al treilea are $538-395=143$ lei. **25.** $a^2-b^2=(a-b)(a+b)\Rightarrow$ $\Rightarrow a-b=\frac{168}{28}=6$; Se obţine $a=17$, $b=11$. **26.** $3x^2-20x=7\Rightarrow x=7$.

Scanned with OKEN Scanner

1.13. Probleme pentru performanţă şcolară şi olimpiade

1. ***a)*** $\sqrt{\frac{1}{10}\cdot 15\cdot\frac{1}{18}\cdot\frac{1}{3}}=\sqrt{\frac{1}{36}}=\frac{1}{6}$; ***b)*** $(\sqrt{2}-1)^{-1}=\frac{1}{\sqrt{2}-1}=\frac{\sqrt{2}+1}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)}=$ $=\sqrt{2}+1\Rightarrow$

$\left[2\cdot(\sqrt{2}+1)^{2006}\right]:(\sqrt{2}+1)^{2005}=2(\sqrt{2}+1)$; ***c)*** $\sqrt{...}=\sqrt{(2-1)+\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\right)+...+\left(\frac{65}{64}-\frac{1}{64}\right)}=$

$=\sqrt{1+1+...+1}=\sqrt{64}=8$. **2.** Din relaţia dată se deduce $a=b$. Obţinem $n=2^{1003}\in\mathbb{N}$.

3. $\frac{3}{1^2\cdot 2^2}=\frac{1}{1^2}-\frac{1}{2^2}$; $\frac{3}{2^2\cdot 3^2}=\frac{1}{2^2}-\frac{1}{3^2}$; ...; $\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}=\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+1)^2}$. Atunci

$S=1-1+\frac{1}{2^2}-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-...-\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}=\frac{1}{(n+1)^2}>0$, $\forall n\in\mathbb{N}$. **4.** $E=(m+n)(m+1)(n+$ 1). Dacă m şi n au aceeaşi paritate atunci $m+n$ este par. Dacă m şi n au parităţi diferite atunci unul din numerele $m+1$ sau $n+1$ este par. **7.** $E=\sqrt{(1-3x)^2}-\sqrt{(2x-1)^2}=|1-3x|-|2x-1|$; obţinem $E(-2006)=2006$.

8. $a=\sqrt{7-4\sqrt{3}}-\sqrt{7+4\sqrt{3}}=\sqrt{(2-\sqrt{3})^2}-\sqrt{(2+\sqrt{3})^2}=|2-\sqrt{3}|-|2+\sqrt{3}|=-2\sqrt{3}$;

a) $a^2=12$; ***b)*** $b=1$; ***c)*** $\sqrt{7-4\sqrt{3}}\cdot\sqrt{7+4\sqrt{3}}=1\Rightarrow\sqrt{7+4\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt{7-4\sqrt{3}}}$ şi notând

$\left(\sqrt{7-4\sqrt{3}}\right)^x=m$ obţinem $m+\frac{1}{m}\geq 2$ cu $m>0\Rightarrow m^2-2m+1\geq 0\Leftrightarrow(m-1)^2\geq 0$ (A).

9. $\sqrt{9-4\sqrt{5}}=|\sqrt{5}-2|=\sqrt{5}-2\Rightarrow a=1$; $\sqrt{11-4\sqrt{7}}=|2-\sqrt{7}|=\sqrt{7}-2\Rightarrow b=1$. Atunci $E=\frac{1}{3}\in\mathbb{Q}$. **10.** ***a)*** $\frac{20}{99}$; ***b)*** $E=\frac{(n-1)(n-2)(n-3)+3n(n-3)}{(n+4)(n+5)(n+6)-9(n+1)(n+6)}$. Toţi termenii de la numărător sau numitor se divid cu 6. **11.** Din $b=\frac{1}{a}\Rightarrow ab=1$ iar din

$a+\frac{1}{a}=\frac{2\sqrt{3}-\sqrt{11}}{2\sqrt{3}+\sqrt{11}}+\frac{2\sqrt{3}+\sqrt{11}}{2\sqrt{3}-\sqrt{11}}=\frac{12+11+12+11}{12-11}=46\Rightarrow E(a,b)=\sqrt{46+54}=10$.

12. ***a)*** Aducem la acelaşi numitor şi obţinem $3=\left(\sqrt{n}+\sqrt{n+3}\right)\left(\sqrt{n+3}-\sqrt{n}\right)$ (A). ***b)*** Folosind relaţia ***a)*** se poate scrie $a=\frac{1}{\sqrt{1}}-\frac{1}{\sqrt{4}}+\frac{1}{\sqrt{4}}-\frac{1}{\sqrt{7}}+...+\frac{1}{\sqrt{166}}-\frac{1}{\sqrt{169}}=1-\frac{1}{13}=\frac{12}{13}$.

13. ***a)*** Avem $\frac{1}{k\sqrt{k+1}+(k+1)\sqrt{k}}=\frac{1}{\sqrt{k^2(k+1)}+\sqrt{(k+1)^2\cdot k}}=\frac{1}{\sqrt{k(k+1)}\left(\sqrt{k}+\sqrt{k+1}\right)}=$

$=\frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{\sqrt{k(k+1)}\left(\sqrt{k+1}-\sqrt{k}\right)\left(\sqrt{k+1}+\sqrt{k}\right)}=\frac{\sqrt{k+1}}{\sqrt{k(k+1)}}-\frac{\sqrt{k}}{\sqrt{k(k+1)}}=\frac{1}{\sqrt{k}}-\frac{1}{\sqrt{k+1}}$. Atunci

$\frac{1}{1\cdot\sqrt{2}+2\cdot\sqrt{1}}=\frac{1}{\sqrt{1}}-\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\frac{1}{2\sqrt{3}+3\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{3}}$, ..., $\frac{1}{n\sqrt{n+1}+(n+1)\sqrt{n}}=\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}$,

iar $S=\frac{1}{\sqrt{1}}-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{4}}+...+\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}=1-\frac{1}{\sqrt{n+1}}=\frac{n+1-\sqrt{n+1}}{n+1}$;

b) Avem $\sqrt{1\cdot 2}<2$; $\sqrt{2\cdot 3}<3$, ..., $\sqrt{n(n+1)}<n+1$. Adunând, rezultă:

Scanned with OKEN Scanner

$\sqrt{1\cdot 2}+\sqrt{2\cdot 3}+...+\sqrt{n(n+1)}<2+3+...+n+1=1+2+...+n=\frac{n(n+1)}{2}<n(n+1)$.

14. $a\in\{1;2;3\}$. **15.** $(a-b)^4=\left[(a-b)^2\right]^2=(a^2+b^2-2ab)^2=(2-2ab)^2=4-8ab+4a^2b^2$ și analog $(a+b)^4=4+8ab+4a^2b^2$, $4-8ab+4a^2b^2-4-8ab-4a^2b^2=8\Leftrightarrow ab=-\frac{1}{2}$.

16. *a)* $\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\left(y+\frac{3}{2}\right)^2=\frac{1}{4}\Rightarrow\left|x-\frac{3}{2}\right|\le\frac{1}{2}\Rightarrow 1\le x\le 2;\ \left|y+\frac{3}{2}\right|\le\frac{1}{2}\Rightarrow -2\le y\le -1\Rightarrow$ $\Rightarrow -1\le x+y\le 1\Rightarrow |x+y|\le 1$; *b)* $1\le x^3\le 8$ și $-8\le y^3\le -1$; $-7\le x^3+y^3\le 7\Rightarrow$ $\Rightarrow|x^3+y^3|\le 7$.

17. $x^2+4y^2+4y-4x\sqrt{2}+9=0\Leftrightarrow(2y+1)^2+\left(x-2\sqrt{2}\right)^2=0\Rightarrow x=2\sqrt{2}$ și $y=-\frac{1}{2}$.

18. Notând $t=x+y$, relația se mai poate scrie $2t^2-3t-\frac{t^2-(x-y)^2}{2}=0$, echivalentă cu $3t^2-6t+(x-y)^2=0$. Obținem $t(t-2)\le 0$, de unde rezultă concluzia.

19. Au loc inegalitățile $x^3+y^3=(x+y)(x^2-xy+y^2)\ge xy(x+y)\ge\frac{4x^2y^2}{x+y}$;

$\frac{x+y}{2}\le\sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}}\Rightarrow\frac{1}{x+y}\ge\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{x^2+y^2}}$; $x^3+y^3\ge\frac{2\sqrt{2}x^2y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}$ și analoagele. Obținem x^3+y^3+ $z^3\ge\sqrt{2}\left(\frac{x^2y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}+\frac{y^2z^2}{\sqrt{y^2+z^2}}+\frac{x^2z^2}{\sqrt{x^2+z^2}}\right)$. Egalitatea are loc pentru $x=y=z$.

20. *a)* $E(x,y)=x^2+y^2-2x-\ 2y+18=(x-1)^2+(y-1)^2+16\ge 16$, $\forall\, x,y\in\mathbb{R}$; $E(x,y)=16$ pentru $x=y=1$. *b)* $|x-2|+|y-2|=-(x^2+y^2-2xy)=\ |=-(x-y)^2\le 0\Rightarrow$ $|x-2|+|y-2|=0\Rightarrow x=y=2\Rightarrow E(2,2)=18$.

21. *a)* $b>0$. Știm că $(a-b)^2\ge 0\Rightarrow a^2\ge 2ab-b^2\ |:b\Rightarrow\frac{a^2}{b}\ge 2a-b$; *b)* Se scriu și $\frac{b^2}{c}\ge 2b-c$ și $\frac{c^2}{a}\ge 2c-a$ și se adună. **22.** *a)* $x,y,z\in[2,3]\Rightarrow 2\le x\le 3\Rightarrow 4\le 2x\le 6$ și 2 $\le y\le 3\Rightarrow -6\ge -3y\ge -9$. Avem: $\left.\begin{matrix}4\le 2x\le 6\\ -9\le -3y\le -6\end{matrix}\right\}\Rightarrow -5\le 2x-3y\le 0$.

$\left.\begin{matrix}6\le 3x\le 9\\ -6\le -2y\le -4\end{matrix}\right\}\Rightarrow 0\le 3x-2y\le 5$. Din $2x-3y\le 0$ și $3x-2y\ge 0\Rightarrow(2x-3y)(3x-2y)<$ 0; *b)* $8\le 1+\frac{x}{y}+\frac{x}{z}+\frac{z}{y}+\frac{y}{x}+1+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}\le\frac{27}{2}\ |-2\Leftrightarrow 6\le\frac{x}{y}+\frac{x}{z}+\frac{z}{y}+\frac{y}{x}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}\le\frac{23}{2}$.

Deoarece, pentru $x,y>0$ are loc $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\ge 2$, $\frac{x}{z}+\frac{z}{x}\ge 2$, $\frac{y}{z}+\frac{z}{y}\ge 2$, prin adunare obținem $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}+\frac{y}{z}+\frac{z}{y}+\frac{x}{z}+\frac{z}{x}\ge 6$. Din $2\le x\le 3$ și $2\le y\le 3\Rightarrow\frac{2}{3}\le\frac{x}{y}\le\frac{3}{2}$ și analoagele.

Scanned with OKEN Scanner

Prin adunare, $\frac{x}{y}+\frac{y}{x}+\frac{x}{z}+\frac{z}{x}+\frac{y}{z}+\frac{z}{y}<6\cdot\frac{3}{2}=9<11{,}5$.

23. ***a)*** Dacă cel puțin unul dintre numere este egal cu 0, este evident. În caz contrar, cel puțin două dintre cele trei numere au același semn. ***b)*** $x=\overline{ab}$ și $y=\overline{ba}$, $x^2-y^2=99(a+b)(a-b)$, $(a+b)(a-b)=5$, $a=3$, $b=2$, $x=32$, $y=23$.

24. ***a)*** Ecuația se mai scrie $(x-y-3)(xy-4)=0$, de unde se obțin soluțiile $\Rightarrow (x,y)\in\{(4,1);(1,4);(-1,-4);(-4,-1);(2,2);(-2,-2)\}$; ***b)*** $E(x)=1-\frac{12}{(x-2)^2+4}\Rightarrow$ $\min\{E(x)\}$ se atinge pentru $x=2\Rightarrow E(2)=-2$.

26. ***a)*** $2\sqrt{5}-3+\frac{1}{2\sqrt{5}+3}=\frac{20-9+1}{2\sqrt{5}+3}=\frac{12}{2\sqrt{5}+3}$, iar $20\sqrt{5}+30=10\left(2\sqrt{5}+3\right)$. Avem

$$\left(\frac{12}{2\sqrt{5}+3}\right)^2\cdot\left(\frac{10(2\sqrt{5}+3)}{1001}\right)^2>\frac{1}{81}\Leftrightarrow\frac{12}{5\sqrt{5}+3}\cdot\frac{10(2\sqrt{5}+3)}{1001}>\frac{1}{9}\Leftrightarrow\frac{120}{1001}>\frac{1}{9}\Leftrightarrow 1080>1001$$

(A); ***b)*** $\left(\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{2}\right)^2\le\left(\sqrt{\frac{x+y}{2}}\right)^2\Leftrightarrow\frac{x+y+2\sqrt{xy}}{4}\le\frac{x+y}{2}\Leftrightarrow 0\le x-2\sqrt{xy}+y\Leftrightarrow$

$0\le\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)^2$ (A) În această inegalitate avem „=” dacă $x=y$. Dacă $x\neq y$ atunci avem „<”; ***c)*** Grupăm, în membrul stâng, primul cu ultimul termen, pe al doilea cu penultimul ș.a.m.d., și aplicăm ***b)***.

27. ***a)*** $a+b=2$, $ab=-11$, $a^3+b^3=74$; ***b)*** $\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}=\frac{a^3+b^3}{(ab)^3}=\frac{(a+b)\left[(a+b)^2-3ab\right]}{(ab)^3}\in\mathbb{Q}$.

39. ***a)*** Fie f numărul de fete și b numărul de băieți; atunci $b+f=20$. O fată oferă $3b+f-1$ flori; un băiat oferă $3f+b-1$; numărul de flori este $n=f(3b+f-1)+b(3f+b-1)=b^2+f^2+6bf-b-f=780-4(f-10)^2\le 780$; ***b)*** numărul maxim de flori oferite se obține pentru $f=10$.

40. ***a)*** $x^2+y^2+z^2\ge xy+xz+yz$ se înmulțește cu 2, se trec toți termenii în membrul stâng și după grupare se obține: $(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\ge 0$ (A). Aceasta este o egalitate dacă și numai dacă $x=y=z$. ***b)*** Avem $xyz=xyz\cdot 1=xyz(x+y+z)=(xy)(yz)+(yz)(zx)+(zx)(xy)$, deci $(xy)^2+(yz)^2+(zx)^2=(xy)(yz)+(yz)(zx)+(zx)(xy)$. Conform punctului ***a)***, rezultă că $xy=yz=zx$. Obținem $x=y=z$ și, cum $x+y+z=1$, rezultă $x=y=z=\frac{1}{3}$.

41. ***a)*** Se arată că $a^3+b^3+c^3-3abc=\frac{1}{2}(a+b+c)\left[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right]$.

Pentru $a+b+c=0$, obținem $a^3+b^3+c^3=3abc$. ***b)*** Egalitatea este echivalentă cu $\frac{(a-b)^2}{2(a+b)}=\frac{\frac{a^2+b^2}{2}-ab}{\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}+\sqrt{ab}}$, sau $\frac{(a-b)^2}{2(a+b)}=\frac{(a-b)^2}{2\left(\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}+\sqrt{ab}\right)}$. Dacă $a\neq b$, deducem că

$a+b=\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}+\sqrt{ab}$, de unde urmează $\left(a+b-\sqrt{ab}\right)^2=\frac{a^2+b^2}{2}$, echivalent cu

Scanned with OKEN Scanner

$a^2+b^2+2ab-2(a+b)\sqrt{ab}+ab=\frac{a^2+b^2}{2}$, sau $(a+b)^2-4(a+b)\sqrt{ab}+4ab=0$.

Adică $a+b-2\sqrt{ab}=0\Leftrightarrow\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2=0$, de unde deducem concluzia.

42. ***a)*** Obținem $x_3=4b-3a$, $x_4=10b-9a$, $x_5=20b-19a$. ***b)*** Deoarece $x_3\geq 0$, rezultă că (*) $4b\geq 3a\geq 0$, deci $b>0$. Deoarece $4b-3a\in\mathbb{N}$, rezultă că $3\cdot(4b-3a)=12b-9a\in\mathbb{N}$ și, cum $10b-9a\in\mathbb{N}$, rezultă că $2b=k\in\mathbb{N}$, adică $0<b=\frac{k}{2}<1$, deci $b=\frac{1}{2}$. Avem $2-3a\in\mathbb{N}$ și $10-19a\in\mathbb{N}$, adică $3a\in\mathbb{N}$ și $19a\in\mathbb{N}$. Prin urmare, $19a-6\cdot 3a=a\in\mathbb{N}$. Dar, din (*), deducem $a\leq\frac{4}{3}\cdot b=\frac{2}{3}$, deci $a=0$.

Scanned with OKEN Scanner

GEOMETRIE

CAPITOLUL 2

Corpuri geometrice

2.1. Puncte, drepte, plane

4. ***a)*** A; ***b)*** A; ***c)*** A; ***d)*** F. **5.** ***a)*** 3; ***b)*** 1; ***c)*** 6; ***d)*** 4. **6.** ***a)*** 4; ***b)*** 6; ***c)*** 6. **7.** ***a)*** 4; ***b)*** 10; ***c)*** 5 plane, dacă oricare trei din cele patru puncte coplanare sunt necoliniare, respectiv 4 plane dacă există trei puncte coliniare. **8.** ***a)*** A; ***b)*** A; ***c)*** F; ***d)*** A; ***e)*** F; ***f)*** A; ***g)*** F; ***h)*** F. **10.** ***a)*** un plan; ***b)*** Dacă $d = AB$, atunci ambele plane coincid cu planul $(d;C)$; ***c)*** CM. **11.** ***a)*** o infinitate; ***b)*** o infinitate; ***c)*** o infinitate. **12.** ***a)*** o infinitate; ***b)*** un singur plan. **13.** $(ABC),(ABD),(ACD)$ şi (BCD). **14.** ***a)*** Dacă, de exemplu, A, B, C ar fi coliniare, atunci A, B, C, D ar fi coplanare, contradicţie. **16.** ***a)*** BM; ***b)*** AC; ***c)*** $\{B\}$; ***d)*** AC; ***e)*** AB; ***f)*** α; ***g)*** α; ***h)*** A. **17.** ***a)*** Numărul minim este 1 (dacă toate punctele sunt coliniare), iar numărul maxim este $\frac{6\cdot5}{2}=15$ dacă oricare trei puncte sunt necoliniare. **18.** Fie d_1,d_2,d_3 cele trei drepte, $\{A\}=d_1\cap d_3$ şi $\{B\}=d_2\cap d_3$. Atunci $d_3=AB\subset(d_1,d_2)$. **19.** ***c)*** $(ABC),(ACD),(BCD)$; ***d)*** AB,AC,BC; ***e)*** AB,AC,AD. **20.** Dacă $M\notin AB$, atunci $\alpha=(M;AB)=\beta$, contradicţie. **21.** ***a)*** 4; ***b)*** Fie A,B,C unul dintre cele două triplete de puncte coliniare. Celălalt triplet conţine punctul D şi două dintre punctele A,B,C, de exemplu A şi B. Atunci toate cele patru puncte aparţin dreptei BC. **22.** ***a)*** Fie $d=AB$. Deoarece A,B,C sunt coliniare, rezultă că $C\in d$. Analog $D\in d$ şi $E\in d$; ***b)*** Nu, de exemplu putem avea $d_1\neq d_2$, $d_1\cap d_2=\{A\}$, $B,C\in d_1$ şi $D,E\in d_2$. **23.** Trei puncte se găsesc oricând într-un acelaşi plan. **24.** ***a)*** Dacă oricare trei puncte sunt coliniare atunci toate punctele sunt coliniare, deci sunt coplanare. Dacă există trei puncte necoliniare, de exemplu A, B şi C, atunci ele determină un plan α. Cum A,B,C,D sunt coplanare, rezultă că $D\in\alpha$. Analog se arată că şi $E\in\alpha$; ***b)*** Nu, de exemplu putem avea trei puncte coliniare $A,B,C\in d$ şi $E\notin(d;D)$. **25.** Construim un plan α care include dreapta d_1, apoi considerăm un punct $A\in\alpha-d_1$ şu un punct $B\notin\alpha$. Dreapta $d_2=BC$ este necoplanară cu d_1. **26.** ***a)*** $\Delta ADB\equiv\Delta CDB$, conform criteriului de congruenţă L.U.L. ***b)***Analog cu ***a)***. **27.** A, B, C sunt necoliniare pentru că $|AB\pm BC|\neq AC$. **28.** A,B,C coliniare $\Rightarrow C\in AB$. Dacă C se află între A şi B atunci $AC=7$ cm iar dacă B se află între A şi C atunci $AC=17$ cm. Se obţine $x=-1$ sau $x=9$. **29.** ***a)*** Fie β planul trapezului. Cum $\alpha\cap\beta=AD$, $e\in\alpha$ şi $E\in\beta$, rezultă că $E\in AD$; ***b)*** Cu teorema lui Thales obţinem: ***i)*** $BC=3$ cm; ***ii)*** $BC=6$ cm. **30.** $(NAB)\cap(MDC)=MN$. **31.** ***c)*** E,O,F coliniare $\Rightarrow V,E,O,F$ coplanare; ***e)*** Adevărat, pentru că $(VAC)\cap(VBD)=VO$ şi $(VBD)\cap(VEF)=VO$. **32.** Pentru uşurinţa exprimării să numim punctele A_i, $i\in\{1,2,...,6\}$. Vom analiza problema în funcţie de numărul maxim al punctelor coliniare existente. Dacă toate punctele sunt coliniare, numărul dreptelor determinate este 1, iar dacă oricare trei puncte sunt necoliniare, numărul dreptelor este 15. Dacă cinci puncte sunt coliniare atunci numărul dreptelor este 6. Dacă A_1,A_2,A_3,A_4 sunt coliniare, avem două subcazuri: dacă $A_i\notin A_5A_6$ pentru orice $i\in\{1,2,3,4\}$ atunci există 9 drepte, iar dacă $A_1\in A_5A_6$, atunci avem 8 drepte. În fine, dacă A_1,A_2,A_3 sunt coliniare, distingem trei

Scanned with OKEN Scanner

subcazuri: ***i)*** Dacă niciunul dintre punctele A_1, A_2, A_3 nu aparţine niciuneia dintre dreptele A_4A_5, A_5A_6 şi A_6A_4, atunci există 13 drepte; ***ii)*** Dacă $A_1 \in A_4A_5$ şi $A_6 \notin A_iA_j$ oricare ar fi $i \neq j$, $i, j \in \{1,2,...,5\}$ atunci numărul dreptelor este 11; ***iii)*** Dacă $A_1 \in A_4A_5$ şi $A_6 \in A_2A_4$, numărul dreptelor determinate este egal cu 9.

2.2. Piramida

6. ***a)*** A; ***b)*** F; ***c)*** F; ***d)*** A; ***e)*** A; ***f)*** F; ***g)*** A; ***h)*** A; ***i)*** F; ***j)*** A; ***k)*** A. **7.** Piramidă patrulateră. **8.** Nu. **10.** ***a)*** 6; ***b)*** 16; ***c)*** 10. **11.** 60 cm. **12.** 225 cm^2. **13.** $108\sqrt{3}$ cm^2. **14.** Se obţine un tetraedru regulat, cu suma lungimilor muchiilor egală cu 24 cm. **15.** Dreptele suport ale muchiilor laterale ale trunchiului sunt muchii ale piramidei din care provine trunchiul, deci sunt concurente. **16.** Desfăşurăm într-un plan feţele ABC şi ACD. Lungimea celui mai scurt drum este egală cu lungimea segmentului $[BD]$ pe această desfăşurare, şi este egală cu $6\sqrt{3}$ cm. **17.** ***a)*** Se foloseşte criteriul de congruenţă LUL; ***c)*** Desfăşurăm în plan feţele VCD şi VCB. Pe desfăşurare, drumul minim este $BD = 4$ cm. Am folosit faptul că triunghiul VBD este echilateral; ***d)*** Desfăşurăm feţele VAB, VBC şi VCD. Obţinem $AD = 4\sqrt{2}$ cm. **18.** ***a)*** n; ***b)*** $n+1$; ***c)*** $2n$. **19.** ***a)*** n; ***b)*** $2n$; ***c)*** $3n$. **20.** ***a)*** $m = 2(v-1)$ şi $f = v$; ***b)*** Adevărat, folosind *a*). **21.** ***a)*** Da; ***b)*** Nu; ***c)*** Nu. **22.** Fie V vârful tetraedrului. Triunghiul $VA'B'$ este echilateral $\Rightarrow AA' = 4$ cm. ***a)*** 60 cm; ***b)*** $\frac{75\sqrt{3}}{4}$ cm.

2.3. Prisma

4. Prismă triunghiulară. **6.** ***a)*** 6; ***b)*** 9. **9.** 8 cm. **10.** 48 cm. **11.** ***a)*** 80 cm; ***b)*** 120 cm. **12.** Piramidă heptagonală şi prismă patrulateră. **14.** Prima şi a treia. **16.** ***b)*** 180 cm; ***c)*** 600 cm^2; ***d)*** $150\sqrt{3}$ cm^2. **17.** ***a)*** 12; ***b)*** 8. **18.** ***a)*** $A'ACC'$ este dreptunghi $\Rightarrow$ mijlocul lui AC' este şi mijloc al lui CA'; ***b)*** $V_{OABCD} = \frac{1}{6} \cdot V_{cub} = 288$ cm^3. **19.** ***a)*** $2n$; ***b)*** $n+2$; ***c)*** $3n$; ***d)*** $(n+2)+2n = 3n-2$, adevărat. **20.** ***a)*** A; ***b)*** A; ***c)*** A; ***d)*** F. **21.** ***a)*** $v = 4$, tetraedru; ***b)*** $m = 18$, prismă hexagonală. **22.** De exemplu, corpul din problema **17.** şi un cub.

23. Putem considera anvelopa ca fiind un poliedru care are v vârfuri, m muchii şi f feţe. Fie p numărul de pentagoane şi h numărul de hexagoane. Avem: $v = 5p$, $f = p + h$, $h = \frac{5p}{3}$, $m = \frac{3v}{2} = \frac{15p}{2}$. Înlocuind în relaţia lui Euler ($v + f = m + 2$), obţinem $5p + \left(p + \frac{5p}{3}\right) = \frac{15p}{2} + 2$. Rezolvând ecuaţia în p, obţinem $p = 12$, de unde $h = 20$ şi $f = 32$.

Teste de evaluare

Testul 1. **1.** ***a)*** Prismă triunghiulară; ***b)*** $[AA']$, $[BB']$ şi $[CC']$; ***c)*** C şi C'; ***d)*** 5 feţe; ***e)*** $A'B$. **2.** ***a)*** Piramidă triunghiulară sau tetraedru; ***b)*** (ABC), (BCD), (DCA) şi (ABD); ***c)*** $[AB]$ şi $[CD]$, $[AC]$ şi $[BD]$, $[AD]$ şi $[BC]$; ***d)*** Adevărat. Punctele D, M şi N determină planul $(DMN) = (ADM)$.

Testul 2. **1.** ***a)*** Prismă patrulateră dreaptă sau paralelipiped dreptunghic; ***b)*** $[AB]$ şi $[BC]$; ***c)*** B, C şi C'; ***d)*** (ABD'); ***e)*** 4 vârfuri. **2.** ***a)*** Piramidă patrulateră; ***b)*** Punctele M, N, P şi R vor coincide după pliere; ***c)*** 40 cm; ***d)*** 5 cm.

Scanned with OKEN Scanner

2.4. Poziţiile relative a două drepte în spaţiu

3. ***a)*** necoplanare; ***b)*** concurente; ***c)*** necoplanare; ***d)*** necoplanare; ***e)*** concurente; ***f)*** paralele; ***g)*** concurente; ***h)*** paralele. **4.** Adevărat; Dacă $AB, CD \subset \alpha$, atunci $A, B, C, D \in \alpha$, deci $AC, BD \subset \alpha$. **5.** ***b)*** Toate punctele aparţin planului (AC, EF); ***c)*** Analog cu *b*); ***d)*** În planul (FE, DB) avem $\Delta FOD \equiv \Delta EOB$ (cazul LUL). **6.** Folosind liniile mijlocii avem $MN = RP (= AC/2)$ şi $MN \parallel RP (\parallel AC)$. **7.** Se foloseşte problema anterioară. **8.** ***a)*** $[OO']$ este linie mijlocie în trapezul $\Rightarrow OO' \parallel AM$; ***b)*** Analog, în trapezul $QDBN$; ***c)*** Ca linii mijlocii, avem $OO' = \frac{AM+CP}{2} = 7$ cm şi $OO'' = \frac{DQ+BN}{2} = 7$ cm; ***d)*** Dreptele OO' şi OO'' sunt paralele cu dreapta *a*. Conform axiomei lui Euclid, OO' şi OO'' coincid; ***e)*** O' şi O'' sunt de aceeaşi parte a lui O, şi coliniare cu acesta. Cum $OO' = OO''$, rezultă că $O' = O''$; ***f)*** MN şi PQ sunt coplanare deoarece sunt concurente în O; ***g)*** Diagonalele patrulaterului $MNPQ$ se înjumătăţesc. **9.** A, B, C, D sunt necoliniare, deci dreptele AC şi BD sunt distincte. Din $AB \parallel CD$ rezultă că AC şi BD sunt coplanare. Două drepte coplanare distincte sunt fie paralele fie concurente. **10.** Fie $d_1 \cap d_2 = \{A\}$. Dacă d_3 nu ar trece prin A atunci d_3 ar intersecta d_1 şi d_2 în alte două puncte, B şi C. Având câte două puncte în planul (ABC), toate cele trei drepte sunt incluse în acest plan, contradicţie! **11.** Fie M, N, P şi Q mijloacele segmentelor $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ şi $[AD]$ şi G centrul de greutate al feţei BCD. Conform problemei 6, $MNPQ$ este paralelogram. Fie O intersecţia diagonalelor paralelogramului. Folosind teorema lui Menelaos în triunghiul ABP se arată că punctul de intersecţie dintre AG şi MP este tocmai punctul O. Analog, toate dreptele determinate de vârfuri cu centrele de greutate ale feţelor opuse trec prin punctul O. **12.** Folosind problema 6 rezultă că cele trei segmente determinate de mijloacele laturilor opuse, se înjumătăţesc două câte două, prin urmare ele sunt concurente. **13.** Se foloseşte faptul că $[MN]$ şi $[QP]$ sunt linii mijlocii în triunghiurile $A'DB$ şi $CD'B'$. **14.** $MN \parallel AB$ şi $AB \parallel FC \Rightarrow MN \parallel FC$. **15.** Planul α şi planul trapezului se intersectează după dreapta AD, aşadar $M \in AD$. Problema devine una de geometrie plană, în planul (ABC). Folosind teorema fundamentală a asemănării se obţine $AM = 15$ cm. **16.** ***a)*** $\Delta NOC \equiv \Delta MOA \Rightarrow \widehat{MOA} \equiv \widehat{NOC} \Rightarrow M, O, N$ sunt coliniare; ***b)*** $M, O, N, V \in (MN, V)$; ***c) i)*** $VARC$ este paralelogram deoarece diagonalele se înjumătăţesc; ***ii)*** Analog; ***iii)*** Analog. **17.** Folosind teoremei bisectoarei rezultă că $\frac{BM}{MC} = \frac{BN}{ND}$ dacă şi numai dacă $AC = AD$. Apoi se foloseşte teorema lui Thales.

2.5. Unghiul a două drepte în spaţiu. Drepte perpendiculare

1. ***a)*** $0°$; ***b)*** $0°$; ***c)*** $0°$; ***d)*** $90°$; ***e)*** $90°$; ***f)*** $45°$; ***g)*** $45°$; ***h)*** $90°$; ***i)*** $90°$. **2.** ***a)*** $P_{A'C'B} = 3l\sqrt{2}$; ***b)*** Triunghiul $A'C'B$ este echilateral, $m(\widehat{A'B, BC'}) = 60°$; ***c)*** $AD' \parallel BC' \Rightarrow m(\widehat{A'B, BC'}) = 60°$. **3.** ***a)*** $45°$; ***b)*** $60°$; ***c)*** $30°$. **4.** ***a)*** $90°$; ***b)*** $90°$; ***c)*** $90°$; ***d)*** $0°$; ***e)*** $90°$; ***f)*** $0°$. **5.** ***a)*** $0°$; ***b)*** $70°$; ***c)*** $0°$; ***d)*** $45°$; ***e)*** $0°$; ***f)*** $80°$. **6.** ***a)*** $0°$; ***b)*** $70°$; ***c)*** $60°$. **7.** ***a)*** $0°$; ***b)*** $45°$; ***c)*** $60°$; ***d)*** $90°$. **8.** ***a)*** $90°$; ***b)*** $0°$; ***c)*** $55°$; ***d)*** $90°$. **9.** ***a)*** $45°$; ***b)*** $60°$; ***c)*** $60°$; ***d)*** $90°$; ***e)*** $60°$.

10. ***a)*** $OO'A'A$ este dreptunghi; ***b)*** $\Delta O'AC$ este isoscel; ***c)*** $m(\widehat{AA', AC}) = m(\widehat{OO', AC}) = 90°$; ***d)*** $\frac{5}{13}$; ***e)*** $\frac{3}{5}$. **11.** ***a)*** $AD^2 + DB^2 = AB^2$; ***b)*** $DE = 6\sqrt{2}$, $AE = 6\sqrt{3} \Rightarrow AD^2 + DE^2 = AE^2$.

Scanned with OKEN Scanner

12. *a)* 0° ; *b)* 90° ; *c)* 60° ; *d)* 60° ; *e)* 60° ; *f)* 0° . **13.** *a)* $AC = 4\sqrt{2}$ cm; Se foloseşte reciproca teoremei lui Pitagora în ΔVAC ; *b) i)* ; 60° *ii)* 45° . **14.** *a)* Triunghiul MCD este isoscel, cu $MC = MD = 5\sqrt{3}$. Se lucrează în ΔMCN , unde N este mijlocul lui $[CD]$; $\cos(\widehat{MCD}) = \frac{\sqrt{3}}{3}$; *b)* $MN = 5\sqrt{2}$ cm, $\mathcal{A}_{MDC} = 25\sqrt{2}$ cm^2; *c)* Fie C' proiecţia lui C pe DM. Atunci $\mathcal{A}_{MDC} = \frac{CC' \cdot DM}{2} \Rightarrow CC' = \frac{10\sqrt{6}}{3}$, $\sin(\widehat{DMC}) = \frac{CC'}{MC} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$. **15.** *a)* Se folosesc liniile mijlocii, $MN \parallel BD$ şi $NP \parallel AC$; *b)* Se arată că $MNPQ$ este paralelogram, apoi dreptunghi şi pătrat. **16.** *a)* $VM = 5\sqrt{3}$ cm; *b)* În triunghiul isoscel VMN , $\sin(\widehat{VM,VN}) = \frac{h_M}{VM}$ unde h_M este înălţimea din M. Exprimând în două moduri $\mathcal{A}_{VMN}$ rezultă că $h_M = \frac{5\sqrt{6}}{3}$. Atunci $\sin(\widehat{VM,VN}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, deci $m(\widehat{VM,VN}) = 60^\circ$. **17.** *a)* 60° ; *b)* 90° ; *c)* 90° ; *d)* 60° .

Teste de evaluare

Testul 1. 1. *a)* 0° ; *b)* 90° ; *c)* 90° ; *d)* 60° ; *e)* 60° .

2. *a)* 60° ; *b)* $m(\widehat{VB,AD}) = m(\widehat{VB,BC}) = 60^\circ$; *c)* Se foloseşte criteriul de congruenţă LLL; *d)* $m(\widehat{AVC}) = m(\widehat{ABC}) = 90^\circ$.

Testul 2

1. *a)* 45° ; *b)* $m(\widehat{AD,BC'}) = m(\widehat{BC,BC'}) = 45^\circ$; *c)* Dacă l este lungimea laturii cubului, atunci $A'B = BC' = C'A' = l\sqrt{2}$; *d)* $\Delta A'BC'$ este echilateral $\Rightarrow m(\widehat{A'BC'}) = 60^\circ$; *e)* $m(\widehat{B'C,DC'}) = m(\widehat{B'C,AB'}) = 60^\circ$ deoarece $\Delta B'CA$ este echilateral.

2. *a)* $[AM]$ şi $[DM]$ sunt mediane omoloage în triunghiurile congruente ABC şi DBC ; *b)* $[MN]$ este mediană în triunghiul isoscel $MAD \Rightarrow [MN]$ este şi înălţime; *c)* Analog cu *a)* şi *b)*, în ΔNCB ; *d)* Fals! De exemplu MN şi AM sunt perpendiculare pe BC dar $MN \not\perp AM$.

2.6. Poziţiile relative ale unei drepte faţă de un plan

1. *a)* inclusă; *b)* paralelă; *c)* secantă; *d)* secantă; *e)* inclusă; *f)* paralelă. **2.** *a)* secantă; *b)* secantă; *c)* inclusă; *d)* paralelă; *e)* inclusă; *f)* secantă. **3.** $CD \parallel AB$ şi $AB \subset \alpha \Rightarrow CD \parallel \alpha$. **4.** MN este linie mijlocie în ΔCAB . **5.** Se folosesc liniile mijlocii. **6.** DE este linie mijlocie în ΔABC .

7. *a)* $AB \subset (ADC)$; *b)* $BC \parallel (VAD)$; *c)* VB este secantă planului (ABC) ; *d)* $MN \parallel BD \Rightarrow MN \parallel (ABC)$; *e)* VA este secantă planului (VBC) ; *f)* AN este secantă planului (VBC) .

8. Se aplică reciproca teoremei lui Thales. **9.** Se foloseşte reciproca teoremei lui Thales.

10. Se arată că ΔVEA e congruent cu ΔVDA . Rezultă că $VE = VD$, apoi se aplică reciproca teoremei lui Thales. **11.** *a)* CD este secantă planului (AMB) deoarece e concurentă cu dreapta AB din plan; *b)* $CF \parallel MN \Rightarrow C, F, M, N$ sunt coplanare; *c)* Se arată că $DENM$ este paralelogram; *d)* $EF \parallel BC \Rightarrow EF \parallel (CBM)$; *e)* $m(\widehat{MN,BE}) = m(\widehat{AB,BE}) = 60^\circ$. **12.** EF este linie mijlocie în trapez; $EF \parallel AB \Rightarrow EF \parallel \alpha$. **13.** *a)* Fie O punctul de intersecţie a diagonalelor paralelogramului $ABCD$. Deoarece $[EO]$ este linie mijlocie în ΔAMC , avem $EO \parallel CM \Rightarrow CM \parallel (DEC)$; *b)* Folosind aceeaşi linie mijlocie, obţinem $EO = \frac{MC}{2}$, şi cum

Scanned with OKEN Scanner

$MC = BD$, rezultă că $EO = DO = DB$, ca urmare centrul cercului circumscris triunghiului EBD coincide cu mijlocul laturii $[BD]$, deci ΔEBD este triunghi dreptunghic în E.

14. Fie M şi N mijloacele segmentelor $[AD]$ şi $[BC]$. Atunci $\frac{VE}{VM} = \frac{2}{3}$ şi $\frac{VF}{VN} = \frac{2}{3}$. Conform reciprocei teoremei lui Thales rezultă $EF \parallel MN$, deci $EF \parallel (ABC)$. **15.** $MA \parallel NC$ şi $MA = NC$ **a)** $MACN$ este paralelogram $\Rightarrow MN \parallel AC$; **b)** $MN = AC = 65$ cm; **c)** $P_{AMNC} = 144$ cm. **16.** ***a)*** fals; ***b)*** adevărat; ***c)*** fals; ***d)*** fals; ***e)*** adevărat; ***f)*** adevărat.

17. ***a)*** $MNAB$ este paralelogram $\Rightarrow MN \parallel AB$; ***b)*** $A'B' \parallel (CMN)$; ***c)*** Presupunând contrariul, ar însemna că $CN \parallel (AB'C')$ şi atunci $CN \parallel B'C'$, fals; ***d)*** Analog cu *a)* avem $AC \parallel MP$.

18. ***a)*** $NP \parallel BC$, conform teoremei lui Thales; ***b)*** $MN \parallel AB \Rightarrow \frac{VM}{VA} = \frac{VN}{VB}$. Rezultă că $\frac{VM}{VA} = \frac{VP}{VC} \Rightarrow MP \parallel AC$. **19.** ***a)*** $AD' \parallel BC'$ şi $BC' \subset (A'C'B)$; ***b)*** Fie $\{O'\} = A'C' \cap B'D'$; Punctele O' şi B aparţin ambelor plane $(A'C'B)$ şi (DBB'), deci $(A'C'B) \cap (DBB') = BO'$.

20. ***a)*** Fie $\{O\} = AC \cap DB$; $(A'C'A) \cap (DBC') = C'O$; ***b)*** În planul $(A'AC)$ dreptele $A'C$ şi $C'O$ sunt concurente, iar $C'O \subset (C'BD)$; ***c)*** Fie $A'C \cap C'O = \{Q\}$; $\Delta QOC \sim \Delta QC'A'$ $\Rightarrow \frac{QO}{QC'} = \frac{OC}{A'C'} = \frac{1}{2}$. **21.** ***a)*** $MN \parallel B'C$ (linie mijlocie) şi $MN \subset (AMN)$; ***b)*** $MN \parallel B'C$ şi $B'C \subset (CA'B')$. **22.** Se aplică reciproca teoremei lui Thales; $EF \parallel AB$ şi $AB \parallel CD \Rightarrow EF \parallel CD$. **23.** ***a)*** $\frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC} \Rightarrow MN \parallel BC \Rightarrow MN \parallel \alpha$; ***b)*** $NC = 32$ cm, $AN = 16$ cm; În ΔAMN obţinem $MN = 20$ cm iar în ΔAMC, $MC = 12\sqrt{7}$ cm; ***c)*** $BM = 24$ cm, $BN = 4\sqrt{97}$ cm (în ΔABN); $P_{BMN} = 4(11 + \sqrt{97})$ cm. **24.** Să presupunem prin reducere la absurd că BC înţeapă planul α într-un punct M. Fie d paralela prin M la AB. Atunci $d \subset (ABC)$ şi dreptele d şi AC sunt concurente. Dar, din relaţiile $AB \parallel \alpha$, $AB \parallel d$, $M \in d$ şi $M \in \alpha$, rezultă că $d \subset \alpha$. Prin urmare AC este secantă planului α, în contradicţie cu $AC \parallel \alpha$. **25.** Se poate demonstra că dacă un plan β conţine o dreaptă d care e paralelă cu un plan α, atunci dreapta de intersecţie a planelor α şi β este paralelă cu d. Aplicând acest rezultat, din $AD \subset (ABD)$ şi $AD \parallel (MNPR)$, rezultă $MN \parallel AD$. Analog avem $PR \parallel AD$, $MR \parallel BC$ şi $PN \parallel BC$, aşadar $MNPR$ este paralelogram. Folosind teorema fundamentală a asemănării obţinem $RM = \frac{15x}{8}$, $MN = \frac{40-5x}{4}$ şi $P_{MNPR} = 20 + \frac{5x}{4}$.

2.7. Dreaptă perpendiculară pe un plan. Distanţa de la un punct la un plan

2. ***a)*** $EA \perp AB$ şi $EA \perp AD$; ***b)*** $EA \perp (ABC)$ şi $DB \subset (ABC)$; ***c)*** $HD \perp (ABC)$ şi $AC \subset (ABC)$; ***d)*** $DB \perp EA$ (conform *b*) şi $DB \perp AC$. **3.** ***a)*** $MACN$ este trapez dreptunghic şi EO este linie mijlocie $\Rightarrow EO \parallel MA$; ***b)*** $OE = \frac{AM + NC}{2} = 15$ cm. **4.** Triunghiul ABM este dreptunghic în B; $AM = 10$ cm. **5.** ***a)*** $CP \perp \alpha$ şi $AB \subset \alpha$; ***b)*** Triunghiurile dreptunghice PCA şi PCB sunt congruente (cazul C.C.); ***c)*** $PA = 13$ cm. **6.** ***a)*** Triunghiurile dreptunghice MOA, MOB, MOC şi MOD sunt congruente (cazul C.C.); ***b)*** $AO = 3\sqrt{2}$ cm; $MO = 3\sqrt{2}$ cm. **7.** ***a)*** VO fiind mediană în triunghiul isoscel VAC, este şi înălţime; ***b)*** $VO \perp DB$ şi $VO \perp AC$; ***c)*** Conform *b*), $d(V,(ABC)) = VO$; $AC = 4\sqrt{3}$ cm, $AO = 2\sqrt{3}$ cm; $VO = 2\sqrt{6}$ cm. **8.** A se vedea problema anterioară. **9.** ***a)*** $AB \perp AC$ şi $AB \perp MC$ (deoarece $MC \perp (ABC)$). **10.** ***a)*** $AC = 4\sqrt{2}$ cm; ***b)*** $MA \perp (ABC)$ şi $AC \subset (ABC)$; ***c)*** $MC = 4\sqrt{3}$ cm; ***d)*** Se poate folosi

Scanned with OKEN Scanner

reciproca teoremei lui Pitagora sau se arată că $BC \perp (MAB)$. **11.** ***a)*** $d(M,AD) = MA = 3\sqrt{2}$ cm; ***b)*** $d(C,(MAB)) = BC = 6$ cm; ***c)*** $d(D,(MAC)) = DO = 3\sqrt{2}$ cm, unde $\{O\} = AC \cap BD$. **12.** ***a)*** Triunghiurile dreptunghice VOA, VOB şi VOC sunt congruente (cazul C.C.); ***b)*** $d(V,(ABC)) = VO = 2\sqrt{6}$ cm. **13.** ***a)*** fals; ***b)*** adevărat; ***c)*** adevărat; ***d)*** fals.

14. Fie O centrul rombului; Triunghiul VAC este isoscel, deci $VO \perp AC$; Cum AC este perpendiculară şi pe BD, rezultă că $AC \perp (VDB)$.

15. ***a)*** $(AB \perp AC$ şi $AB \perp AD) \Rightarrow AB \perp (ACD) \Rightarrow AB \perp CD$; ***b)*** Din *a)* se ştie că $AD \perp BC$. Cum $BC \perp AM$, rezultă că $BC \perp (AD,AM)$, adică $BC \perp (DAM)$; ***c)*** $BC = 50$ cm, $AM = \frac{AB \cdot AC}{BC} = 24$ cm, $DM = 30$ cm, $\mathcal{A}_{BDC} = \frac{DM \cdot BC}{2} = 750$ cm^2 . **16.** ***a)*** $d(D,(C'B'B)) = DC = 3$ cm ; ***b)*** $A'C = 13$ cm . **17.** ***a)*** $A'B \perp AB'$ şi $A'B \perp AD$ (deoarece $AD \perp (A'AB)$) ; ***b)*** $A'B \perp AB'$ şi $A'B \perp B'C' \Rightarrow A'B \perp (AB'C') \Rightarrow AC' \perp A'B$. Analog $AC' \perp A'D$, deci $AC' \perp (A'BD)$; ***c)*** $A'C = l\sqrt{3}$. **18.** ***a)*** $DC \perp (ABC) \Rightarrow DC \perp AB$. Apoi, din $DC \perp AB$ şi $AB \perp AC$ rezultă $AB \perp (DAC)$, deci $d(B,(DAC)) = AB$; ***b)*** Din relaţiile $AB \perp (DAC)$ şi $DA \subset (DAC)$ rezultă $AB \perp AD$; ***c)*** $d(D;AB) = AD = 16$ cm .

19. În triunghiurile dreptunghice DAB şi DAC avem: $AB^2 = a^2$ şi $AC^2 = 2a^2$. Apoi aplicăm reciproca teoremei lui Pitagora în ΔABC . **20.** Dacă O este centrul cercului circumscris triunghiului ABC , atunci $OA = OB = OC$ şi rezultă că triunghiurile dreptunghice VOA, VOB şi VOC sunt congruente (cazul C.C.), aşadar $VA = VB = VC$. Reciproc, dacă $VA = VB = VC$, aceleaşi triunghiuri dreptunghice sunt congruente conform cazului I.C: şi rezultă că $OA = OB = OC$, adică O este centrul cercului circumscris triunghiului ABC. **21.** Fie O proiecţia lui V pe (ABC) . Conform problemei 20, O este centrul cercului circumscris triunghiului ABC; $OA = \frac{AB \cdot \sqrt{3}}{3} = 10$ cm ; $d(V,(ABC)) = VO = 2\sqrt{11}$ cm . **22.** $VO = 8$ cm .

23. ***a)*** Fie O' piciorul înălţimii piramidei, $O' \in (ABC)$. Analog problemei 20 rezultă că $O'A = O'B = O'C = O'D$, adică $O' = O$; ***b)*** $VO \perp OM$; $OM = 5$ cm ; $VM = 13$ cm ; ***c)*** $OP = \frac{OM \cdot OV}{VM} = \frac{60}{13}$ cm ; ***d)*** $(BC \perp OM$ şi $BC \perp VM) \Rightarrow BC \perp (VOM) \Rightarrow BC \perp OP$; $(BC \perp OP$ şi $OP \perp VM) \Rightarrow OP \perp (VBC)$. **24.** EB este linie mijlocie în $\Delta DAA'$ $\Rightarrow AB = BD$. ***a)*** Deoarece $AB = BD = BC$, rezultă că centrul cercului circumscris triunghiului ACD este B, mijlocul laturii AD, aşadar triunghiul ACD este dreptunghic în C; ***b)*** $DC \perp AC$ (conform *a)* şi $DC \subset CC'$. **25.** Folosind teorema înălţimii avem $OB \cdot OC = OA^2$ şi $OD \cdot OE = OA^2$. Rezultă că $OB \cdot OC = OD \cdot OE$, care este cunoscută. drept condiţie de conciclicitate a patru puncte. Pentru demonstrarea acestui rezultat, din asemănarea triunghiurilor BOD şi EOC se obţine $\widehat{DBC} \equiv \widehat{DEC}$. **26.** Este o generalizare a problemei 20. Demonstraţia este similară. **27.** ***a)*** $d(B,(AMN)) = BO = 12\sqrt{2}$ cm; ***b)*** În trapezul dreptunghic $MACN$ se obţine $MN = 34$ cm; $\mathcal{A}_{MACN} = 408\sqrt{2}$ cm^2 ; $\mathcal{A}_{OMN} = \mathcal{A}_{MACN} - (\mathcal{A}_{MOA} + \mathcal{A}_{NOC})$ $\Rightarrow \mathcal{A}_{OMN} = 204\sqrt{2}$ cm^2; $\mathcal{A}_{OMN} = \frac{MN \cdot d(O,MN)}{2} \Rightarrow d(O,MN) = 12\sqrt{2}$ cm.

28. Fie $BB' = x$; $B'A^2 = x^2 + 64$, $B'C'^2 = |x - 12|^2 + 64$ (din trapezul dreptunghic $B'BCC'$), $C'A = 15$. ***a)*** $B'C'^2 + C'A'^2 = B'A^2 \Rightarrow x = 15\frac{3}{8}$ cm; ***b)*** $B'C' = B'A \Rightarrow x = 6$ cm.

Scanned with OKEN Scanner

29. $AB'^2 = AC'^2 = x^2 + 100$, $B'C'^2 = 4x^2 + 100$; Fiind triunghi isoscel, triunghiul $AB'C'$ nu poate fi dreptunghic decât în A; $AB'^2 + AC'^2 = B'C'^2 \Rightarrow x = 5\sqrt{2}$ cm. **30.** ***a)*** $MB = 10\sqrt{10}$ cm; $AD = 24$ cm; $MD = 26$ cm; ***b)*** Folosind teorema bisectoarei se obține $\frac{ME}{EB} = \frac{MF}{FC}\left(= \frac{10}{30}\right)$. Conform reciprocei teoremei lui Thales rezultă că $EF \parallel BC$, deci $EF \parallel (ABC)$; ***c)*** $\frac{ME}{EB} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{ME}{AB} = \frac{1}{4}$; $\frac{EF}{BC} = \frac{ME}{AB} \Rightarrow EF = \frac{1}{4} \cdot BC \Rightarrow EF = 9$ cm. **31.** Se însumează egalitățile $BD^2 - DC^2 = OB^2 - OC^2$, $CE^2 - EA^2 = OC^2 - OA^2$ și $AF^2 - FB^2 = OA^2 - OB^2$. **32.** Avem $AC \perp (DBB')$, deci $D'O \perp AC$. (1). Considerăm $AB = a$. Rezultă $DO = BO = \frac{a\sqrt{2}}{2}$. Fie $\{P\} = CM \cap BB'$. Rezultă că P este mijlocul segmentului $[BB']$ și $BM = \frac{a}{2}$. Triunghiurile PBO și ODD' sunt dreptunghice, iar $\frac{PB}{OD} = \frac{OB}{DD'} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Rezultă $\triangle PBO \sim \triangle ODD'$, deci unghiurile $\widehat{POB}$ și $\widehat{DOD'}$ sunt complementare. Prin urmare $D'O \perp PO$ (2). Din (1) și (2), rezultă $D'O \perp (AMC)$.

Teste de evaluare

Testul 1. **1.** ***a)*** $A'B' \parallel AB$ și $AB \subset (ABC)$; ***b)*** $AA' \perp AB$ și $AA' \perp AC$; ***c)*** $AM \subset (ABC)$ și $(ABC) \parallel (A'B'C')$; ***d)*** AM este mediană în triunghiul echilateral ABC; ***e)*** Se arată că $BC \perp (AA'M)$. **2.** ***a)*** $BC \parallel AD$; ***b)*** $VO \perp AC$ și $VO \perp DB$; ***c)*** ***i)*** $VC \parallel MO$ (MO este linie mijlocie în ΔAVC) și $MO \subset (MDB)$; ***ii)*** Se arată că VA este perpendiculară cu BM și DM.

Testul 2. **1.** ***a)*** $A'C' \parallel AC$ și $AC \subset (ABD)$; ***b)*** $AB \perp BC$ și $AB \perp BB'$; ***c)*** $AB \perp (BCC')$ și $BC' \subset (BCC')$; ***d)*** $BC' = 50$ cm; ***e)*** $AC' = 130$ cm. **2.** ***a)*** $AD \perp BD$ și $AD \perp CD$; ***b)*** $AD \perp (BCD)$ și $BC \subset (BCD)$; ***c)*** Fie M mijlocul lui $[AB]$ și O centrul triunghiului ABC. Atunci $d(D;(ABC)) = DO$; $DM = 3$ cm (mediana unui triunghi dreptunghic este jumătate din ipotenuză); $OM = \sqrt{3}$ cm; $DO = \sqrt{6}$ cm; ***d)*** $d(D;AB) = DM = 3$ cm.

2.8. Poziţiile relative a două şi trei plane. Plane paralele

1. ***a)*** $(ADN) \parallel (BCM)$ deoarece $AN \parallel BM$ și $AD \parallel BC$. **2.** ***a)*** $(ABC) \parallel (A'B'C')$ pentru că $AB \parallel A'B'$ și $BC \parallel B'C'$; ***b)*** Punctul de intersecție a dreptelor AB și $A'B'$ aparține ambelor plane. **3.** ***a)*** $AD \perp BC$ și $DD' \parallel CC'$; ***b)*** $A'B' \perp BB'$ și $A'B' \perp B'C'$; ***c)*** 28 cm. **4.** ***a)*** ($MN \parallel AB$ și $NP \parallel BC$) $\Rightarrow (ABC) \parallel (MNP)$; ***b)*** $\frac{1}{2}$. **5.** Fie $MO \perp (ABC)$, $O \in (ABC)$ și $\{O'\} = MO \cap \alpha$; $d(\alpha,(ABC)) = OO'$; $OO' = \frac{MO}{2} = b$. **6.** ***a)*** $AF \parallel CD$ și $FF' \parallel DD'$; ***b)*** $BE \parallel CD$ și $EE' \parallel DD'$; ***c)*** Cele trei plane conțin dreapta OO', O și O' fiind centrele bazelor; ***d)*** Planul (DEE') conține dreapta DD', paralelă cu planul (BCC'); ***e)*** $d((AFF'),(CDD')) = AC = a\sqrt{3}$. **7.** ***a)*** $BE \parallel AF$ și $BC \parallel AD$; ***b)*** $[OO']$ este linie mijlocie în ΔBDF; ***c)*** Analog cu *b)*. **8.** ***a)*** $[MM']$ este linie mijlocie în trapezul $ABB'A'$; ***b)*** $MM' \parallel CC'$; ***c)*** În trapezul $M'C'CM$ avem $\frac{M'G'}{G'C'} = \frac{MG}{GC}\left(= \frac{1}{2}\right)$. Rezultă $GG \parallel MM'$, conform unui cunoscut de geometrie plană (se poate demonstra construind paralela prin M la $M'C'$ și aplicând reciproca teoremei lui Thales). **9.** $AN \perp AC$ și $AB \perp AN \Rightarrow AB \perp (ACN)$. **10.** ***a)***

Scanned with OKEN Scanner

Adevărat; Dacă prin absurd, ar exista $d \subset \alpha$ astfel încât $d \cap \beta = \{M\}$, atunci M ar aparține și lui α și lui β, contradicție; **b)** Adevărat; Fie $\alpha \parallel \beta$ și $d \subset \alpha$. Există o infinitate de plane care conțin dreapta d. Aceste plane intersectează β după drepte paralele cu d; **c)** Fals; În cubul $ABCDA'B'C'D'$, $(ABD) \parallel (A'B'D')$ dar $AB \not\parallel A'D'$; **d)** Adevărat; Fie $d = \alpha \cap \beta$. Paralela prin M la d este paralelă atât cu α cât și cu β. Pentru demonstrarea unicității, presupunând contrariul, ar exista dreptele a și b care trec prin M și sunt paralele cu α și β. Atunci $(a,b) \parallel \alpha$ și $(a,b) \parallel \beta$, ceea ce implică $\alpha \parallel \beta$, fals; **e)** Adevărat; Pentru $\alpha \parallel \beta$, este evident; Pentru $\alpha \cap \beta = d$, oricare paralelă cu d din planul α, este paralelă cu β; **f)** Adevărat; Unicul plan este cel determinat de paralelele prin M la a și b; **g)** Adevărat; Fie $\perp \alpha$, $AB \perp \beta$, $A \in \alpha$, $B \in \beta$. Dacă am presupune prin absurd că $\alpha \neq \beta$, atunci ar exista un punct $\{M\} = \alpha \cap \beta$. În aceste condiții, $AB \perp AM$ și $AB \perp BM$, imposibil; **h)** Fals; În cubul $ABCDA'B'C'D'$, $(AA'B) \parallel CC'$ și $(AA'D') \parallel CC'$, dar $(AA'B) \not\parallel (AA'D')$; **i)** Adevărat; Fie a și b cele două drepte necoplanare, și b' o paralelă la b, concurentă cu a. Atât α cât și β sunt paralele cu planul (a,b'). **11.** **a)** $MN \parallel BC$ (linie mijlocie) $\Rightarrow MN \parallel (BCD)$; Analog $MP \parallel (BCD)$; **b)** $\frac{MN}{BC} = \frac{NP}{CD} = \frac{MP}{BD}$; **c)** Raportul de asemănare a triunghiurilor MNP și BCD este $r = \frac{1}{2}$; $\frac{P_{MNP}}{P_{BCD}} = r$; **d)** $\frac{\mathcal{A}_{MNP}}{\mathcal{A}_{BCD}} = r^2$. **12.** **a)** $\frac{AG_1}{AM} = \frac{AG_2}{AN} \Rightarrow G_1G_2 \parallel MN \Rightarrow G_1G_2 \parallel (BCD)$; **b)** $G_1G_2 \parallel (BCD)$ și analog, $G_1G_3 \parallel (BCD)$; **c)** $\frac{G_1G_2}{MN} = \frac{2}{3}$; $\frac{MN}{BD} = \frac{1}{2}$; $\frac{G_1G_2}{BD} = \frac{1}{3}$; $\Delta G_1G_2G_3 \sim \Delta DBC$, raportul de asemănare fiind $r = \frac{1}{3}$; $\frac{P_{G_1G_2G_3}}{P_{BCD}} = r = \frac{1}{3}$; **d)** $\frac{\mathcal{A}_{G_1G_2G_3}}{\mathcal{A}_{BCD}} = r^2 = \frac{1}{9}$. **13.** **a)** $AB \parallel (MNP)$; **b)** $DC \parallel (MNP)$; **c)** Planul (ABC) conține dreapta AB, paralelă cu planul (MNP). Rezultă că $(ABC) \cap (MNP)$ este o dreaptă paralelă cu AB, așadar $PQ \parallel MN$. Analog se arată că $QM \parallel PN$; **d)** $\frac{AM}{MD} = \frac{AQ}{AC}$ și $\frac{AQ}{AC} = \frac{BP}{PC}$. **14.** **a)** $BD \parallel B'D'$ și $A'D \parallel B'C$; **b)** $(ACC') \cap (CB'D') = CO'$; **c)** $\{G_1\} = AC' \cap A'O$ și $\{G_2\} = AC' \cap CO'$; $A'O$ este mediană în $\Delta A'BD$, iar din asemănarea triunghiurilor G_1AO și $G_1C'A'$ deducem $\frac{A'G_1}{A'O} = \frac{1}{3}$. Analog pentru G_2; **d)** $AG_1 = \frac{1}{3}AC'$ și $C'G_2 = \frac{1}{3}AC'$. **15.** **a)** $A'D \parallel B'C$ și $BD \parallel B'D'$; **b)** A se vedea problema 17, Cap. 1.4.; **c)** Folosind problema 14 *d*, avem $d((A'BD),(CB'D')) = \frac{AC'}{3} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$. **16.** **a)** Se arată că $MNRP$ este paralelogram și că $MP = RN\ (= a\sqrt{2})$; **b)** $PS \parallel BB'$ și $BB' \parallel (ABC)$; **c)** $d((PSN),(RMT)) = ST = \frac{a\sqrt{2}}{2}$. **17.** Fie M un punct al dreptei d și fie g' paralela prin M la g. Planul (d,g') conține d și e paralel cu g. Unicitatea este dată de faptul că orice plan paralel cu g care conține M, conține și g'. **18.** Fie $C' \in \beta$, $BC' \parallel AD$ și $N' \in BC'$ astfel încât $\frac{BN'}{N'C'} = \frac{MA}{MD}$. Atunci $(MN' \parallel CC'$ și $MN' \parallel DC) \Rightarrow (MNN') \parallel \beta$. **19.** Se folosește teorema: "Dacă un plan este paralel cu o dreaptă d conținută într-un alt plan, atunci intersecția celor două plane este paralelă cu d". Teorema se demonstrează cu ușurință prin reducere la absurd. **20.** Presupunem prin absurd că α și β sunt secante, $\alpha \cap \beta = d$. Dreapta d nu este paralelă și cu a și cu b, căci ar rezulta $a \parallel b$. Să considerăm că $d \cap a \neq \varnothing$. Cum $d \subset \beta$, rezultă că $\beta \cap a \neq \varnothing$, în contradicție cu $\beta \parallel a$. **21.** Analizăm cazul în care β se află între α

Scanned with OKEN Scanner

Scanned with OKEN Scanner

și γ (celelalte cazuri sunt similare). Planul (BCD) taie planele paralele β și γ după două drepte paralele, deci $CD \parallel QP$. Analog se arată că $CD \parallel MN$. Rezultă că $QP \parallel MN$, și analog $QM \parallel PN$. **22.** Cele trei puncte aparțin dreptei de intersecție a planelor (AEC) și (BFD). **23.** Dacă QP și MN sunt paralele cu AD, se folosește teorema lui Thales în triunghiurile CAD și BAD. Dacă QP și MN nu sunt paralele cu AD, atunci dreptele QP, MN și AD sunt concurente într-un punct F. Aplicând teorema lui Menelaos în triunghiurile CAD și BAD, rezultă că $\frac{QC}{QA}\cdot\frac{FA}{FD}\cdot\frac{PD}{PC}=1$ și $\frac{MA}{MB}\cdot\frac{NB}{ND}\cdot\frac{FD}{FA}=1$. Înmulțind aceste relații, rezultă concluzia. Reciproc, fie α planul determinat de Q, M, și P și fie $\{N'\}=\alpha\cap BD$. Folosind implicația directă tocmai demonstrată, se obține că $\frac{BN'}{DN'}=\frac{BN}{DN}$, așadar punctele N și N' coincid.

2.9. Secțiuni paralele cu baza în corpurile studiate

1. ***a)*** $\frac{AA''}{A'A''}=\frac{1}{2}$; ***b)*** $\frac{1}{2}$; ***c)*** $\frac{7}{9}$. **2.** ***a)*** $AC=8\sqrt{2}$ cm; ***b)*** $[O_1O_2]$ este linie mijlocie în $\Delta B'AC$; ***c)*** Se arată că $O_1O_2O_3O_4$ este romb și are diagonalele egale; ***d)*** $AC=8\sqrt{2}$ cm; $O_1O_2=4\sqrt{2}$ cm; $\mathcal{A}_{O_1O_2O_3O_4}=32$ cm^2. **3.** ***a)*** $A'B'$ și AB sunt dreptele de intersecție a planului (VAB) cu două plane paralele; ***b)*** Se folosește teorema fundamentală a asemănării; ***c)*** $VA=12$ cm. **4.** ***a)*** Se aplică T.F.A. în triunghiurile VAB, VBC și VCA; ***b)*** Se obține direct din *a*). **5.** ***a)*** Se folosesc proporții derivate și reciproca teoremei lui Thales; ***b)*** $DE \parallel AB$ și $DF \parallel AC$. **6.** ***a)*** Vezi problema 4.*b*; ***b)*** Raportul de asemănare a triunghiurilor ABC și DEF este $r=\frac{7}{2}$; ***i)*** $\frac{P_{ABC}}{P_{DEF}}=r=\frac{7}{2}$; ***ii)*** $\frac{\mathcal{A}_{ABC}}{\mathcal{A}_{DEF}}=r^2=\frac{49}{4}$. **7.** ***a)*** Triunghiurile VOA, VOB, VOC și VOD sunt congruente; ***b)*** 225 cm^2. **8.** ***a)*** Adevărat; Toate triunghiurile determinate de înălțime cu câte un vârf al bazei sunt congruente; ***b)*** Fals. **9.** ***a)*** $VM=6$ cm; ***b)*** Considerând $VABC$ ca o piramidă cu baza VBC, asemănător rezolvărilor problemelor 4 și 6, se obține $\frac{\mathcal{A}_{\text{secțiune}}}{\mathcal{A}_{VBC}}=\left(\frac{AO}{AM}\right)^2$; $\mathcal{A}_{VBC}=48$ cm^2; $\frac{AO}{AM}=\frac{2}{3}$; $\mathcal{A}_{\text{secțiune}}=\frac{64}{3}$ cm^2. **10.** ***a)*** $\frac{A'B'}{AB}=\frac{VA'}{VA}=\frac{VS}{VO}$; $A'B'=\frac{10}{3}$ cm; ***b)*** $a=13$ cm. **11.** ***a)*** $BC'=15$ cm; ***b)*** $d(\alpha,\beta)=\frac{1}{3}\cdot d((ABC),(A'B'C'))=4$ cm. **12.** ***a)*** $AA''B''B$ este dreptunghi; ***b)*** $A''B'' \parallel AB$ și $B''C'' \parallel BC$; ***c)*** Planul $A'ADD'$ taie planele paralele $(A'B'C')$ și $(A''B''C'')$ după drepte paralele; $A''D'' \parallel A'D' \Rightarrow A'A''=D'D''$. **13.** ***a)*** $[O_1O_2]$ este linie mijlocie în $\Delta B'AC$; ***b)*** $O_1O_2 \parallel AC$ și $O_2O_3 \parallel BD$; ***c)*** $\frac{\mathcal{A}_{O_1O_2O_3O_4}}{\mathcal{A}_{ABCD}}=\frac{1}{2}$. **14.** Fie α planul punctelor M, N, P, Q. Planele paralele $(AA'D)$ și $(BB'C)$ sunt tăiate de α după două drepte paralele; Analog pentru planele (ABB') și (DCC'). **15.** ***a)*** $AA' \parallel CC' \Rightarrow A, A', C'$ și C sunt coplanare $\Rightarrow C' \in (AA'C)$; ***b)*** $\mathcal{A}_{AA'C'C}=h\cdot 18\sqrt{2}$; $\mathcal{A}_{ABCD}=18^2$ cm^2; $h=9\sqrt{2}$ cm. **16.** ***a)*** $AC'=(6\sqrt{2})\cdot\sqrt{2}$ cm $=12$ cm; ***b)*** $AB=6$ cm; ***c)*** $\mathcal{A}_{A'ABB'}=36\sqrt{2}$ cm^2. **17.** ***a)*** $AC=\sqrt{41}$ cm; $\mathcal{A}_{AA'C'C}=AA'\cdot AC=20\sqrt{41}$ cm^2; ***b)*** $BC'=5\sqrt{17}$ cm; $\mathcal{A}_{ABC'D'}=AB\cdot BC'=20\sqrt{17}$ cm^2; ***c)*** $AB'=4\sqrt{26}$ cm; $\mathcal{A}_{ADC'B'}=AD\cdot AB'=20\sqrt{26}$ cm^2. **18.** ***a)*** Există două secțiuni diagonale neechivalente pentru că hexagonul are două tipuri de diagonale, exemplificate prin AD și AC; ***b)*** $\mathcal{A}_{ADD'A'}=8$ cm^2; $\mathcal{A}_{ACC'A'}=4\sqrt{3}$ cm^2.

19. Fie trunchiul $ABCDA'B'C'D'$, V vârful piramidei din care provine trunchiul, O şi O' centrele bazelor, M mijlocul lui $[BC]$ şi M' mijlocul lui $[B'C']$; În trapezul dreptunghic $OO'M'M$ se obţine $OO' = 4\sqrt{2}$ cm; $\frac{VO'}{VO} = \frac{8}{12} \Rightarrow \frac{OO'}{VO} = \frac{4}{12} \Rightarrow VO = 12\sqrt{2}$ cm. **20.** $l = 10$ cm, $L = 30$ cm; $l_{\text{secţiune}} = \frac{l+L}{2} = 20$ cm; $\mathcal{A}_{\text{secţiune}} = 400$ cm^2. **21.** ***a)*** Folosind notaţiile obişnuite avem $\frac{VO'}{VO} = \frac{O'M'}{OM}$; Folosind proporţii derivate obţinem $VO = 36$ cm; ***b)*** $a_t^2 = O'O^2 + (a_B - a_b)^2 \Rightarrow a_t = 2\sqrt{37}$ cm. **22.** ***a)*** Se arată că distanţele de la cele patru puncte, la planul bazei mari, sunt egale; ***b)*** Fie E şi F punctele în care planul α taie dreptele AB şi DC, şi fie $\{Q\} = AC \cap BD$. Fie $EO = OF = x$. Folosind teorema fundamentală a asemănării şi proporţii derivate obţinem $x = \frac{l \cdot L}{l+L}$, deci latura secţiunii are lungimea $2x = \frac{2lL}{l+L}$, iar aria secţiunii este egală cu $\left(\frac{2lL}{l+L}\right)^2$. **23.** ***a)*** 0; ***b)*** 9. **24.** Fie piramida $VABCD$, cu $AB = VA = l$. Se aplică reciproca teoremei lui Pitagora în ΔVAC. **25.** ***a)*** $l_{\text{bazei}} \cdot \sqrt{2} = l \Rightarrow l_{\text{bazei}} = \frac{l\sqrt{2}}{2}$; ***b)*** $a_{\text{bazei}} = \frac{l\sqrt{2}}{4}$; $h = \frac{l\sqrt{3}}{2}$; $a^2 = (a_{\text{bazei}})^2 + h^2 \Rightarrow a = \frac{l\sqrt{14}}{4}$.

Teste de evaluare

Testul 1. **1.** ***a)*** Definiţia prismei; ***b)*** $NP \parallel CC'$ (deoarece $PNCC'$ este dreptunghi); ***c)*** $MN \parallel BC$ (linie mijlocie în ΔABC); ***d)*** $(MNP) \parallel BC$ şi $(MNP) \parallel CC'$; ***e)*** Fie Q mijlocul lui $[BC]$ şi $\{Q'\} = AQ \cap MN$; $AQ \perp (BCC') \Rightarrow d((MNP),(BCC')) = QQ'$; $QQ' = \frac{AQ}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$ cm. **2.** ***a)*** Fie E, F şi G mijloacele laturilor $[AB]$, $[BC]$ şi $[CD]$. Aplicând reciproca teoremei fundamentale a asemănării avem $\frac{VM}{VE} = \frac{VN}{VF} \Rightarrow MN \parallel EF$; ***b)*** $MN \parallel AC \Rightarrow MN \parallel (ABC)$, şi analog $NP \parallel (ABC)$; ***c)*** $\Delta MNP \sim \Delta EFQ$, raportul de asemănare fiind $r = \frac{2}{3}$; Cum $\frac{\mathcal{A}_{EFG}}{\mathcal{A}_{ABCD}} = \frac{1}{4}$, rezultă că $\frac{\mathcal{A}_{MNP}}{\mathcal{A}_{ABCD}} = \frac{1}{6}$; ***d)*** $d((MNP),(ABC)) = \frac{VO}{3} = 3$ cm.

Testul 2. **1.** ***a)*** $A'C' \parallel AC$ şi $AC \subset (AB'C)$; ***b)*** $A'C' \parallel (AB'C)$ şi analog cu ***a)***, $A'D \parallel (AB'C)$; ***c)*** $O'D$ şi $B'O$ sunt dreptele după care planul $(D'DB)$ taie planele paralele $(A'C'D)$ şi $(AB'C)$; ***d)*** $\Delta GB'D' \sim \Delta GOB \Rightarrow \frac{B'G}{GO} = \frac{B'D'}{OB} = 2$; ***e)*** $[B'O]$ este mediană în $\Delta AB'C$ şi $\frac{B'G}{B'O} = \frac{2}{3}$. **2.** ***a)*** $\frac{B'C'}{BC} = \frac{4}{9}$; ***b)*** Fie V vârful piramidei din care provine trunchiul şi fie O şi O' centrele bazelor. Folosind teorema fundamentală a asemănării în ΔVAB $(A'B' \parallel AB)$ şi în ΔVOB $(O'B' \parallel OB)$ se obţine $\frac{VO'}{VO} = \frac{A'B'}{AB}$, de unde cu ajutorul proporţiilor derivate găsim $VO = 27$ cm.

2.10. Probleme cu caracter aplicativ

1. 220 plăci. **2.** ***a)*** $CC' = 30\sqrt{2}$ cm; ***b)*** $C'P = 30$ cm şi $\frac{\sqrt{3}}{3}$; ***c)*** Din $DD' \parallel AA'$ şi $AA' \subset (A'AP)$ rezultă $DD' \parallel (A'AP)$. **3.** ***a)*** 6; ***b)*** 12; ***c)*** 8.

Scanned with OKEN Scanner

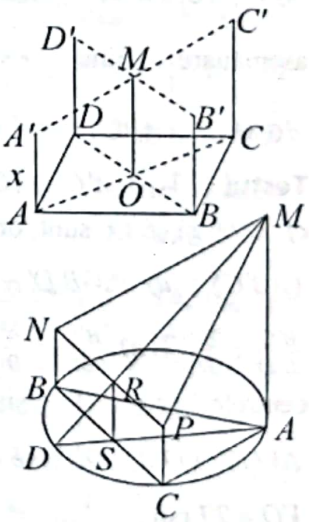
4. $AEHGC = 24, AHC = 12\sqrt{2}, AHGC = 12 + 6\sqrt{2}$ și $12\sqrt{2} < 12 + 6\sqrt{2} < 24$. **5.** Lungimea minimă este de 30 cm. **6.** Distanța parcursă de furnică este egală cu $5 + \frac{5\sqrt{41}}{3} + \frac{10\sqrt{22}}{3}$ cm, deci a consumat aproximativ 15,653 g lemn. **7.** ***a)*** $1080 + 162\sqrt{3}$ dm^2; ***b)*** 60°. **8.** ***a)*** $MNM'N'$ paralelogram; ***b)*** 2,5 kg de vopsea albă costă 50 de lei, iar 57,5 kg de vopsea albastră costă 1380 de lei. Suma totală este egală cu 1430 de lei. **9.** b) 8 cuburi; c) Determinăm c.m.m.d.c. al numerelor 12, 18 și 30. Obținem muchia cubului de 6 cm. Numărul cuburilor este 30. **10.** ***a)*** $40\sqrt{3}$ m; ***b)*** Împărțim cubul în 27 de cuburi cu muchia $\frac{20}{3}$ m. Având 27 de cuburi și 28 de fluturi, conform principiului cutiei, cel puțin un cub va conține 2 fluturi. Distanța dintre cei doi fluturi va fi mai mică decât diagonala cubului, adică $\frac{20\sqrt{3}}{3} < 12$. **11.** ***a)*** 320 lei; ***b)*** 6 flacoane; ***c)*** 10 felinare. **12.** $6\sqrt{3} > 10$; se poate introduce. **13.** ***a)*** $4x^2 = 64 \Rightarrow x = 4$ cm; ***b)*** $10\sqrt{26}$ cm; ***c)*** $30\% \cdot \mathcal{A}_{foaie} = 1680 > 1600 = \mathcal{A}_{cutie}$. **14.** 12 cuburi. **15.** BC are 40 de cm și se vor folosi 40:5 + 1 = 9 capse. Pentru CC' se folosesc 50:5 + 1 = 11 capse, iar pentru AB se folosesc 80:5 + 1 = 17 capse. Fiecare muchie apare de 4 ori, deci vor fi 148 de capse ;i cum capsele din cele 8 vârfuri s-au numărat de 3 ori, în final vom obține 148 – 16 = 132 capse. **16.** 3 kg vopsea. **17.** ***a)*** 800 m^2; ***b)*** 750000 pietre. **18.** ***a)*** $4\sqrt{6}$ cm; ***b)*** $8\sqrt{2}$ cm^2. **19.** ***a)*** $PB'MD$ paralelogram; ***b)*** Drumul cel mai scurt este lungimea segmentului $[PM]$ pe desfășurare. $PM = \sqrt{68}$ cm; ***c)*** Fie $MT \perp DC, T \in (DC)$; $d(M; BB') = d(T; B) = 5$ cm. **20.** ***a)*** $l = 4, L = 28 \Rightarrow A = 196$ dm^2; ***b)*** $A = 28 \cdot 20 = 560$ dm^2; $V_{vopsea} = 56000$ ml = 56 l ; prețul vopselei este egal cu $56 \cdot 16 = 896$ lei.

21. ***a)*** $\sqrt{333}$ m; ***b)*** $\frac{\sqrt{333}}{2} - \frac{\sqrt{148}}{3}$ m.

2.11. Probleme pentru olimpiade și concursuri școlare

5. Presupunem că punctele A', B', C', D' sunt coplanare. Fie $\{M\} = A'C' \cap B'D'$ și $\{O\} = AC \cap BD$, iar $AA' = x$. În trapezele dreptunghice $ACC'A'$ și $BB'D'D$ segmentul OM este linie mijlocie

$\Rightarrow OM = \frac{x+8}{2} = \frac{4+6}{2} \Rightarrow x = 2$ adică $A'A = 2$.



8. $BN = CP = a$ și $BN \perp (ABC), CP \perp (ABC) \Rightarrow BN \parallel CP \Rightarrow BCPN$ dreptunghi

$\Rightarrow NP \parallel BC$. Fie AD diametru în cerc și notăm $\{S\} = AD \cap BC$ și $\{R\} = MD \cap (BCN) \Rightarrow RS \perp DA \Rightarrow RS \parallel MA \Rightarrow$

$\Rightarrow \Delta DSR \sim \Delta DAM \Rightarrow \frac{RS}{DS} = \frac{MA}{DA} \Rightarrow RS = a = PC \Rightarrow R \in NP$.

Notăm $d = (ABC) \cap (MNP)$ și cum $D \in (ABC) \cap (MNP)$, rezultă că d trece prin D. Din $PN \parallel BC$, $NP \subset (MNP)$, $BC \subset (ABC)$ și $d = (ABC) \cap (MNP) \Rightarrow d \parallel BC \parallel NP$. Dar $AD \perp BC$ și $BC \parallel d$, deci dreapta d este perpendiculară pe diametrul AD. Ca urmare, d este tangentă la cerc.

10. Se arată că mijloacele segmentelor $[MN]$; $[BD']$ și $[B'D]$ coincid $\Leftrightarrow ABCDA'B'C'D'$ este cub. **11.** Desfășurând paralelipipedul, condiția de minim a sumei implică $EB = FQ$. Deoarece $BEQF$ este paralelogram, rezultă că $AEPF$ paralelogram. Avem echivalențele: $EF \perp AP \Leftrightarrow AEPF$ romb $\Leftrightarrow AF = PF \Leftrightarrow AD = QP \Leftrightarrow ABCD$ pătrat. **12.** 36 cm.

Scanned with OKEN Scanner

Scanned with OKEN Scanner

CAPITOLUL 3

Proiecţii ortogonale

3.1. Proiecţii de puncte, segmente şi drepte pe un plan

1. ***a)*** A; ***b)*** B; ***c)*** D; ***d)*** AC; ***e)*** DC'; ***f)*** AC; ***g)*** A'; ***h)*** ΔADC; ***i)*** $ABCD$. **2.** ***a)*** $[OA]$; ***b)*** $[OM]$; ***c)*** $\triangle AOB$. **3.** ***a)*** Dacă AB şi $A'B'$ ar avea un punct comun, atunci acel punct ar fi punct comun dreptei AB şi planului α, în contradicţie cu ipoteza $AB \parallel \alpha$; ***b)*** $A'B'$ este distanţa dintre dreptele paralele AA' şi BB' iar $[AB]$ este oblică; ***c)*** $\{O\} \in (ABA') \cap \alpha \Rightarrow \{O\} \in A'B'$. **4.** ***a)*** $\{O\} \in (ABA') \cap \alpha \Rightarrow \{O\} \in A'B'$; ***b)*** $\Delta OAA' \sim \Delta OBB'$. **5.** ***a)*** Este evident că punctele A,B,C,A',B',C' sunt coplanare. Fie β planul lor. Atunci $A',B',C' \in \alpha \cap \beta$, şi cum $\alpha \cap \beta$ este o dreaptă, înseamnă că A',B' şi C' sunt coliniare; ***b)*** Se foloseşte teorema lui Thales; ***c)*** $A'B' = 2$ cm. **6.** ***a)*** $\frac{A'B'}{A'C'} = \frac{AB}{AC} \Rightarrow A'C' = \frac{7}{2}$ cm; ***b)*** Fie $AM \parallel A'B'$, $M \in (BB')$. Atunci $m(\widehat{AB, A'B'}) = m(\widehat{BAM})$ şi $\cos(\widehat{BAM}) = \frac{1}{2} \Rightarrow m(\widehat{BAM}) = 60^\circ$. **7.** ***a)*** $\Delta COD \sim \Delta AOB$; $\frac{CO}{OA} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{CO}{AC} = \frac{1}{3}$; ***b)*** $C' = \text{pr}_\alpha C$; $O' \in AC'$; $\frac{OO'}{CC'} = \frac{AO}{AC}$ (T.F.A.); $\frac{AO}{AC} = \frac{2}{3}$; $OO' = 24$ cm. **8.** ***a)*** $M' \in B'C'$ şi $[MM']$ este linie mijlocie în trapezul $BB'C'C$; ***b)*** $G' \in AM'$; $\frac{AG'}{AM'} = \frac{AG}{AM} = \frac{2}{3}$; ***c)*** $A'B' \le AB$, $A'C' \le AC$ şi $B'C' \le BC$. **9.** ***a)*** $OO' \parallel AA'$ (linie mijlocie în trapezul $AA'C'C$) $\Rightarrow OO' \perp \alpha$; ***b)*** $O' \in B'D'$ iar diagonalele $A'C'$ şi $B'D'$ se înjumătăţesc. **10.** ***a)*** $(OO' \perp OA$ şi $OB \perp OA) \Rightarrow OA \perp (OO'B)$. Cum $O'A'$ este paralelă cu OA, rezultă că $O'A' \perp (OO'B)$, deci $O'A' \perp OB$; ***b)*** $O'A' \perp (OO'B) \Rightarrow O'A' \perp O'B'$. **11.** ***a)*** Conform problemei 9, $A'B'C'D'$ este paralelogram, iar conform problemei 10 aplicată pentru unghiul drept $\widehat{ABC}$, rezultă că $m(\widehat{A'B'C'}) = 90^\circ$; ***b)*** Folosind problema 10, $m(\widehat{A'O'B'}) = 90^\circ$. **12.** Ambele proiecţii coincid cu centrul pătratului. **13.** ***a)*** $\Delta OAB \equiv \Delta O'A'B'$ (L.L.L.); ***b)*** Vom rezolva mai întâi cazul ***ii)***. Fie M piciorul perpendicularei din B pe OA şi fie $M' = \text{pr}_\alpha M$. Se arată cu uşurinţă că $M' \in O'A'$, $B'M' \perp O'A'$ şi $[B'M'] = \text{pr}_\alpha[BM]$. Triunghiurile dreptunghice BOM şi $B'O'M'$ au $OM = O'M'$ şi $MB > M'B'$, de unde rezultă că $\text{tg}(\widehat{AOB}) > \text{tg}(\widehat{A'O'B'})$, relaţie echivalentă cu $m(\widehat{AOB}) > m(\widehat{A'O'B'})$; ***i)*** Fie ($OC$ şi ($O'C'$ semidreptele opuse semidreptelor (OA, respectiv ($O'A'$. Unghiul COB este ascuţit, deci, aşa cum am demonstrat mai sus, avem $m(\widehat{COB}) > m(\widehat{C'O'B'})$. Cum $\widehat{COB}$ şi $\widehat{C'O'B'}$ sunt suplementele unghiurilor $\widehat{AOB}$ şi $\widehat{A'O'B'}$, rezultă că $m(\widehat{AOB}) < m(\widehat{A'O'B'})$. **14.** ***a)*** $(CC' \perp AB$ şi $AB \perp BC) \Rightarrow AB \perp (BCC') \Rightarrow AB \perp BC'$; ***b)*** În triunghiul dreptunghic BCC' cateta este mai mică decât ipotenuza; ***c)*** $\text{tg}(\widehat{ACB}) = \frac{3}{4}$; ***d)*** $\text{tg}(\widehat{AC'B}) = \frac{3}{a} > \frac{3}{4} \Rightarrow \text{tg}(\widehat{ACB}) < \text{tg}(\widehat{AC'B})$; ***e)*** Unghiurile BAC şi $BA'C$ sunt complementare cu unghiurile ACB şi $AC'B$. **15.** ***a)*** $CC' = BB'$; $\Delta CC'A \equiv \Delta BB'A$ (I.C.); ***b)*** Fie M mijlocul lui $[BC]$ şi M' mijlocul lui $[B'C']$. Se arată că $\text{tg}(\widehat{B'AM'}) < \text{tg}(\widehat{BAM})$. **16.** ***a)*** $\Delta AA'B \equiv \Delta AA'C$ (I.C.); ***b)*** Fie M mijlocul lui $[BC]$; $\text{tg}(\widehat{ABC}) = \frac{AM}{BM}$ este mai mare decât $\text{tg}(\widehat{A'BC}) = \frac{A'M}{BM}$. Rezultă că

$\widehat{ABC} > \widehat{A'BC}$ aşadar $\widehat{BAC} < \widehat{BA'C}$. **17.** Avem $AB > AC$ şi $BC = 26$ cm ; Cazul I): $AC = BC$. Se obţine $AC = 26$ cm , $AM = 24$ cm , $AB = 24\sqrt{2}$ cm , $P_{ABC} = 52 + 24\sqrt{2}$ cm ; Cazul II): $AB = BC$. Se obţine $AM = 10$ cm , $AC = 10\sqrt{2}$ cm , $P_{ABC} = 52 + 10\sqrt{2}$ cm . **18.** ***a)*** Triunghiurile dreptunghice MOA , MOB şi MOC sunt congruente (C.C.); ***b)*** $MA = 26$ cm ; $\cos(\widehat{MAO}) = \frac{5}{13}$. **19.** Se arată că $A'B = A'C = A'D$ folosind congruenţa triunghiurilor dreptunghice $AA'B$, $AA'C$ şi $AA'D$ (I.C.). **21.** ***a)*** $\text{pr}_{(ABC)}[VA] = [AO]$; $AO = \frac{AC}{2} = 3\sqrt{2}$ cm ; ***b)*** ΔVAC este echilateral $\Rightarrow m(\widehat{VA, AC}) = 60°$. ***c)*** Dacă O este centrul bazei, atunci $pr_{(ABD)}VA = VO = 3\sqrt{6}$. **22.** ***a)*** $OM = 6$ cm ; $VO = 6\sqrt{3}$ cm ; ***b)*** $\mathcal{A}_{VAC} = \frac{VO \cdot AC}{2} = 36\sqrt{6}$ cm^2 ; ***c)*** Lungimea proiecţiei fiecărei muchii laterale este egală cu raza bazei iar lungimea proiecţiei fiecărei muchii a bazei este egală cu latura bazei. Se obţine suma egală cu $48 + 24\sqrt{2}$ cm . **23.** ***a)*** $BC \perp AE$ şi $BC \perp AD$; ***b)*** $d(D, BC) = DE$; $AE = 6\sqrt{3}$ cm ; $DE = 2\sqrt{43}$ cm ; ***c)*** $\mathcal{A}_{DBC} = 12\sqrt{43}$ cm^2 ; ***d)*** $\frac{\mathcal{A}_{ABC}}{\mathcal{A}_{DBC}} = \frac{(AE \cdot BC)/2}{(DE \cdot BC)/2} = \frac{AE}{DE} = \cos(\widehat{DEA})$. **24.** ***a)*** $\cos(\widehat{AOA'}) = \frac{AO}{OA'}$, $\cos(\widehat{COC'}) = \frac{CO}{OC'}$ şi $AO = CO$; ***b)*** $AO = CO = 4$ cm ; $A'O^2 = 65$ cm^2 , $C'O^2 = x^2 + 16$, $A'C'^2 = x^2 + 81$, iar în trapezul $A'ACC'$, $A'C'^2 = (7 - x)^2 + 8^2$ cm^2 . Se obţine $x = \frac{16}{7}$ cm .

3.2. Unghiul unei drepte cu un plan. Lungimea proiecţiei unui segment

1. ***a)*** 5 cm ; ***b)*** $5\sqrt{2}$ cm ; ***c)*** $5\sqrt{3}$ cm . **2.** ***a)*** $AB \parallel \alpha$ sau $AB \subset \alpha$; ***b)*** $AB \perp \alpha$. **3.** ***a)*** $45°$; ***b)*** $30°$; ***c)*** $60°$. **4.** ***a)*** $0°$; ***b)*** $90°$; ***c)*** $45°$; ***d)*** $\frac{\sqrt{6}}{3}$. **5.** ***a)*** a ; ***b)*** $\frac{a\sqrt{2}}{2}$; ***c)*** 0; ***d)*** $A'AB'D'$ este o piramidă triunghiulară regulată cu latura bazei de lungime $a\sqrt{2}$ şi muchiile laterale de lungime a . Proiecţia muchiei laterale $[A'B']$ pe planul bazei, $(AB'D')$, este egală cu raza bazei, deci $\text{pr}_{(AB'D')}[A'B'] = a\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{a\sqrt{6}}{3}$. **6.** ***a)*** Fie V vârful piramidei din care provine trunchiul. Triunghiul isoscel VAC are $m(\widehat{VAC}) = 45°$, ca urmare el este dreptunghic; ***b)*** $i = 8$ cm . **7.** ***a)*** 0; ***b)*** l ; ***c)*** 0 (deoarece $BB' \perp A'C'$); ***d)*** $\frac{l\sqrt{2}}{2}$. **8.** ***a)*** $m(\widehat{OC', (ABC)}) = m(\widehat{C'OC}) = 45°$; ***b)*** $OC = 7\sqrt{2}$ cm ; $OC' = OA' = 14$ cm ; $A'C' = 14\sqrt{2}$ cm . Se aplică reciproca teoremei lui Pitagora; ***c)*** 7 cm . **9.** ***b)*** $\frac{a\sqrt{3}}{3}$; ***c)*** $\frac{\sqrt{3}}{3}$; ***d)*** $AB \perp CD \Rightarrow \text{pr}_{CD}[AB] = 0$. **10.** ***a)*** Unghiul drept este $\widehat{B'A'C'}$ deoarece $\Delta A'BC$ este triunghi isoscel cu baza $[BC]$; ***b)*** $m(\widehat{AB, \alpha}) = m(\widehat{ABA'})$; $A'B = \frac{a\sqrt{2}}{2}$; $\cos(\widehat{ABA'}) = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow m(\widehat{ABA'}) = 45°$. **11.** ***a)*** Laturile congruente ale triunghiului isoscel $A'BC$ sunt $[A'B]$ şi $[A'C]$. Rezultă că $[AB] \equiv [AC]$, şi ca urmare, triunghiul ABC este dreptunghic în A ; ***b)*** Vezi *a)*; ***c)*** $AB = AC = 3\sqrt{3}$ cm ; $A'C = 2\sqrt{3}$ cm ; $\cos(\widehat{AC, \alpha}) = \frac{A'C}{AC} = \frac{2}{3}$; ***d)*** $d(A; \alpha) = AA' = \sqrt{15}$ cm . **12.** ***a)*** $m(\widehat{CM, (ABC)}) = m(\widehat{MCA})$;

Scanned with OKEN Scanner

$AC = a\sqrt{2} \Rightarrow AM = AC \Rightarrow m(\widehat{MCA}) = 45^\circ$; **b)** $\cos(\widehat{DM,(ABC)}) = \frac{AD}{DM} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

13. **a)** $m(\widehat{A'B',(ABC)}) = m(\widehat{A'B',AB}) = 45^\circ$; **b)** Fie $B'' \in (BB')$ astfel încât $BB'' = 7$ cm . Atunci $A'B' \parallel AB'' \Rightarrow m(\widehat{A'B',AC}) = m(\widehat{B''AC}) = 60^\circ$, deoarece $\Delta AB''C$ având toate laturile cu lungimea de $7\sqrt{2}$ cm , este echilateral; **c)** $\text{pr}_{AC}A' = A$; $\Delta B'AC$ este isoscel $\Rightarrow B'O \perp AC \Rightarrow \text{pr}_{AC}B' = O$. **14.** **a)** $m(\widehat{SB,(ABC)}) = m(\widehat{SBA})$; ΔABD este echilateral; $AB = 14$ cm $\Rightarrow \Delta ABS$ este dreptunghic isoscel; $m(\widehat{SBA}) = 45^\circ$; **b)** $m(\widehat{SC,(ABC)}) = m(\widehat{SCA})$; $AC = 14\sqrt{3}$; $\text{tg}(\widehat{SCA}) = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow m(\widehat{SCA}) = 30^\circ$; **c)** $m(\widehat{OB,(ABC)}) = m(\widehat{OBQ})$, unde Q centrul rombului. OQ este linie mijlocie în triunghiul CAS ; $\text{tg}(\widehat{OBQ}) = \frac{OQ}{OB} = 1 \Rightarrow m(\widehat{OQB}) = 45^\circ$.

15. **a)** $\sin(\widehat{NAO}) = \sin(\widehat{MAO}) \Rightarrow \widehat{NAO} \equiv \widehat{MAO} \Rightarrow A$, M şi N sunt coliniare; **b)** $AO = 4\sqrt{3}$ cm $\Rightarrow AC = 8\sqrt{3}$ cm ; $\text{tg}(\widehat{MAC}) = \sqrt{3} \Rightarrow m(\widehat{MAC}) = 60^\circ$; **c)** $\cos(\widehat{NDO}) = \frac{1}{3}$.

16. **a)** Triunghiurile dreptunghice VOA , VOB , VOC şi VOD sunt congruente (I.C.) $\Rightarrow OA = OB = OC = OD$, adică O este centrul pătratului $ABCD$; **b)** 45° ; **c)** ΔVAC este dreptunghic în $V \Rightarrow VA \perp CV$, ca urmare proiecţia segmentului $[VA]$ pe CV are lungimea egală cu 0. **17.** **a)** Adevărat. Dreptele lor suport formează cu planul α unghiuri congruente; **b)** Fals; **c)** Adevărat; Dacă notăm $\alpha = m(\widehat{AB,CD})$, atunci cele două proiecţii au lungimile $AB \cdot \cos\alpha$, respectiv $CD \cdot \cos\alpha$ şi sunt egale pentru $AB = CD$; **d)** Fals. **18.** **a)** $\text{pr}_{BC'}[BB'] = [BQ]$, unde Q este centrul feţei $BB'C'C$; $BQ = \frac{l\sqrt{2}}{2}$; **b)** $\text{pr}_{AD'}[BB'] = [AM]$, unde M este centrul feţei $ADD'A'$ (se foloseşte faptul că $B'M$ este înălţime în triunghiul echilateral $B'AD'$); $AM = \frac{l\sqrt{2}}{2}$; **c)** $AB' \perp D'C \Rightarrow \text{pr}_{D'C}[AB']$ este un punct; **d)** $AB \perp BC'$ şi $B'Q \perp BC'$, deci $\text{pr}_{BC'}[AB'] = [BQ]$ şi are lungimea $\frac{l\sqrt{2}}{2}$. **19.** $AD = 8$ cm ; $AB = 8\sqrt{3}$ cm . **a)** $\text{pr}_{AD}M = A$ şi $\text{pr}_{AD}C = D \Rightarrow \text{pr}_{AD}[MC] = [AD]$; **b)** $AC = 16$ cm ; $\cos(\widehat{ACM}) = \frac{2\sqrt{5}}{5}$; **c)** Se arată că $CB \perp (ABM)$ şi se deduce că triunghiul MBC este dreptunghic în B. Deoarece $d(B;MC)$ este egală cu lungimea înălţimii din B a triunghiului MBC, se obţine că $d(B;MC) = \frac{BM \cdot BC}{MC} = \frac{16\sqrt{5}}{5}$ cm . **20.** **a)** Triunghiurile dreptunghice MEA , MEB şi MEC sunt dreptunghice (I.C.). Rezultă că $EA = EB = EC$, deci E este centrul cercului circumscris triunghiului BAC . Se ştie că un triunghi este dreptunghic dacă şi numai dacă centrul cercului circumscris lui este mijlocul unei laturi; **b)** $EF = \frac{AB}{2} = 5$ cm ; $m(\widehat{MF,(ABC)}) = m(\widehat{MFE})$; $\text{tg}(\widehat{MFE}) = \sqrt{3} \Rightarrow m(\widehat{MFE}) = 60^\circ$. **21.** **a)** $A'B = 9$ cm ; **b)** $\cos(\widehat{ACA'}) = \frac{A'C}{AC} = \frac{3\sqrt{109}}{24} = \frac{\sqrt{109}}{12}$; **c)** Fie M piciorul perpendicularei din A pe BC şi fie N piciorul perpendicularei din A' pe AM. Deducem succesiv că $BC \perp (AMA')$, $A'N \perp BC$ şi $A'N \perp (ABC)$. Rezultă că $\text{pr}_{(ABC)}[AA'] = [AN]$. Cu teorema catetei în triunghiul dreptunghic $AA'M$ se obţine

Scanned with OKEN Scanner

$AN = \frac{135}{8}$ cm. **22.** ***a)*** $\Delta AA'B \equiv \Delta AA'C$ (I.C.) $\Rightarrow \widehat{ACA'} \equiv \widehat{ABA'}$, deci $m(\widehat{AC,\alpha}) = 60^\circ$; ***b)*** Dacă notăm cu l lungimea laturii triunghiului ABC, atunci din triunghiul dreptunghic ABA' obținem $A'B = \frac{l}{2}$. Cum $A'C = A'B$, rezultă că $BA' + A'C = BC$, adică $A' \in BC$.

23. ***a)*** Dacă B și C ar fi de o parte și de alta a planului α ar trebui ca BC să fie mai mare sau egală decât $BB' + CC'$. Dar $BC = 32\sqrt{2}$ cm și $BB' + CC' = 64$ cm; ***b)*** Se arată că $BB'C'C$ este dreptunghi; ***c)*** Triunghiul $AB'C'$ este isoscel ($AC' = AB' = 32$ cm) și dreptunghic (conform reciprocei teoremei lui Pitagora, folosind și faptul că $B'C' = BC = 32\sqrt{2}$ cm).

24. ***a)*** $AO = 4\sqrt{3}$ cm $\Rightarrow AO = \frac{1}{2}AV \Rightarrow m(\widehat{VAO}) = 60^\circ$; ***b)*** Fie M mijlocul lui $[BC]$. Atunci $m(\widehat{AO,(VBC)}) = m(\widehat{OMV})$. Avem $OM = 2\sqrt{3}$ cm, $VM = 2\sqrt{39}$ cm și $\cos(\widehat{OMV}) = \frac{1}{\sqrt{13}}$.

25. ***a)*** Din asemănarea triunghiurilor OCD și OAB se obține $OC = 4$ cm și $OA = 12$ cm. Rezultă că ΔMOA este dreptunghic isoscel, deci $m(\widehat{AM,(ABC)}) = m(\widehat{MAO}) = 45^\circ$; ***b)*** $CD \parallel AB \Rightarrow m(\widehat{MB,DC}) = m(\widehat{MBA})$. Folosind *a)* avem $AM = BM = 12\sqrt{2}$ cm. Se mai arată că diagonalele trapezului sunt perpendiculare și se calculează $AB = 12\sqrt{2}$ cm. Se deduce că triunghiul MAB este echilateral, așadar $m(\widehat{MBA}) = 60^\circ$; ***c)*** Lungimea proiecției lui $[DC]$ pe MB este $DC \cdot \cos(\widehat{DC,AB}) = 4\sqrt{2} \cdot \cos 60^\circ = 2\sqrt{2}$ cm.

3.3. Teorema celor trei perpendiculare

1. ***a)*** $d(A,BC) = AB = 8$ *cm*; ***b)*** $MC \perp (ABC), AB \perp BC, AB, BC \subset (ABC) \overset{T_3\perp}{\Rightarrow} MB \perp BC$; ***c)*** $MB \perp BC \Rightarrow d(M,BC) = MB = 10$ *cm*. **2.** ***a)*** ΔABC isoscel, (AM) mediană $\Rightarrow (AM)$ înălțime $\Rightarrow AM \perp BC$; ***b)*** $d(A,BC) = AM = 12$ *cm*; ***c)*** Conform $T_3 \perp \Rightarrow PM \perp BC$; ***d)*** $PM \perp BC \Rightarrow d(P,BC) = PM = 20$ *cm*.

3. ***a)*** $AD \perp BC \Rightarrow d(A,BC) = AD = 24$; ***b)*** $T_3 \perp \Rightarrow QD \perp BC \Rightarrow d(Q,BC) = QD = 24\sqrt{2}$ cm.

4. ***a)*** Conform $T_3 \perp \Rightarrow NO \perp BD$; ***b)*** $AO = \frac{l\sqrt{2}}{2} \Rightarrow AO = 3\sqrt{2} \Rightarrow NO = 6\sqrt{2}$. ***c)*** $pr_{(ABC)}NO = AO \Rightarrow m(\widehat{NO;(ABC)}) = m(\widehat{AON}) = 60^\circ$. **5.** ***a)*** Conform $T_3 \perp \Rightarrow MB \perp BC$; ***b)*** Conform $T_3 \perp \Rightarrow MD \perp DC \Rightarrow \Delta MDC$ *dr.*, $m(\sphericalangle MDC) = 90^\circ$; ***c)*** $d(M,BD) = \frac{3\sqrt{769}}{5}$ *cm*. **6.** ***a)*** $MA \perp (ABC), MN \perp BC$, $AN, BC \subset (ABC) \overset{R_1T_3\perp}{\Rightarrow} AN \perp BC$; ***b)*** $d(A;BC) = 20$ *cm*; ***c)*** $d(A;MN) = 12$ *cm*. **7.** ***a)*** Conform teoremei celor trei perpendiculare, rezultă că $MB \perp BC$. ***b)*** Din $AP \perp MB$, $MB \perp BC$, $AB \perp BC$ și $MB, BC \subset (MBC) \overset{R_2T_3\perp}{\Rightarrow} AP \perp (MBC)$; **8.** ***a)*** Conform $T_3 \perp \Rightarrow AO \perp BD$; ***b)*** Conform $R_2T_3 \perp \Rightarrow d(A;(A'BD)) = \frac{10\sqrt{3}}{3}$ *cm*. **9.** ***a)*** Din teorema celor trei perpendiculare, obținem $VM \perp BC \Rightarrow d(V,BC) = VM = 13$ cm; ***b)*** Conform reciprocei a doua a teoremei celor trei perpendiculare, $d(O;(VBC)) = \frac{60}{13}$ cm. **10.** ***a)*** $VM = 5$ *cm*; ***b)*** $OP \perp VM$, $VM \perp BC, OM \perp BC, VM, BC \subset (VBC) \overset{R_2T_3\perp}{\Rightarrow} OP \perp (VBC)$; ***c)***

Scanned with OKEN Scanner

$2,4\ cm$. **11.** *a)* $d(V;AB)=4\sqrt{2}\ cm$; *b)* $d(O,(VAB))=2\sqrt{2}\ cm$.

12. *a)* $AA'\perp(ABC), AO\perp BD, AO, BD\subset(ABC)\overset{T_1\perp}{\Rightarrow} A'O\perp BD$; *b)* $\frac{10\sqrt{3}}{3}\ cm$. **13.** *a)* $\frac{6\sqrt{21}}{7}\ cm$; *b)* $\frac{18\sqrt{21}}{7}\ cm$. **14.** *a)* $AB=16\ cm$; *b)* $MB=2\sqrt{41}\ cm$. **15.** *a)* $AB=8\ cm$; *b)* Fie $BE\perp MN, MN\perp AC, BN\perp AC, MN, AC\subset(MAC)\overset{R_2T_3\perp}{\Rightarrow}$ $BE\perp(MAC)\Rightarrow pr_{(MAC)}MB=ME=2\ cm$. **16.** *a)* 36 cm; *b)* 30°; *c)* $9\sqrt{3}\ cm$. **17.** *a)* $18\ cm$; *b)* $3\sqrt{85}\ cm$; *c)* $\frac{180\sqrt{181}}{181}\ cm$; *d)* $\frac{360\sqrt{181}}{181}\ cm$. **18.** *a)* 45°; *b)* 90°; *c)* $\frac{6\sqrt{30}}{5}\ cm$. **19.** *a)* $9^2+12^2=15^2\overset{R.T.P}{\Rightarrow}\Delta ABC$ dr., $m(\sphericalangle BAC)=90^\circ$; *b)* 45°; *c)* $3\sqrt{34}\ cm$; *d)* $\frac{45\sqrt{34}}{34}\ cm$. **20.** *a)* $2a$; *b)* 45°; *c)* $a\sqrt{3}$; *d)* $\frac{2a\sqrt{21}}{7}\ cm$. **22.** *a)* 60°; *b)* $2\sqrt{3}\ cm$; *c)* $4\sqrt{3}\ cm$; *d)* 60°. **23.** *a)* $2a^2$; *b)* $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. **24.** $A_{ABC}=A_{AMB}+A_{BMC}+A_{AMC}$, de unde rezultă că $RM+SM+TM=h$, unde h= înălțimea triunghiului echilateral ABC. $\cos\left(\widehat{PRM}\right)=\frac{RM}{PR}$, $\cos\left(\widehat{PSM}\right)=\frac{SM}{PS}$, $\cos\left(\widehat{PTM}\right)=\frac{TM}{PT}\Rightarrow E=RM+SM+TM=h=$ constant. **25.** Fie $MO\perp(ABC)$, $O\in(ABC)$, $MN\perp AC$, $N\in(AC)$, $MP\perp AB$, $P\in(AB)$ și $MQ\perp BC$, $Q\in(BC)$. Conform $R_1T_3\perp\Rightarrow ON\perp AC$, $OP\perp AB$ și $OQ\perp BC$, deci O este centrul cercului înscris în triunghiul ABC. **26.** *a)* Fie $E=pr_{AB}O$. Presupunem că A, H, E sunt coliniare. Deoarece $OA\perp OC$ și $OA\perp OB$, rezultă $OA\perp(OCB)$, de unde $OA\perp BC$ (1). E este piciorul perpendicularei din O pe $BC\Rightarrow OE\perp BC$ (2). Din (1) și (2) obținem $BC\perp(OAE)\Rightarrow BC\perp AE$ (3). $BC\perp AE, OE\perp BC\Rightarrow HE\perp BC$ (4). Deci prin punctul E trec două perpendiculare pe BC – absurd, deci A, H, E coliniare. Analog $HF\perp AC$ și B, H, F coliniare $\Rightarrow H$ ortocentrul ΔABC; *c)* Se arată că $A^2_{BOC}=A_{ABC}\cdot A_{HBC}$; $A^2_{AOC}=A_{ABC}\cdot A_{HAC}$; $A^2_{AOB}=A_{ABC}\cdot A_{HAB}$. Adunăm relațiile membru cu membru și obținem:
$A^2_{BOC}+A^2_{AOC}+A^2_{AOB}=A_{ABC}\cdot(A_{HBC}+A_{HAC}+A_{HAB})=A_{ABC}\cdot A_{ABC}=A^2_{ABC}$.

27. $MH\perp(ABC)$, $MA_1\perp BC$, $BC, HA_1\subset(ABC)\overset{R_1T_3\perp}{\Rightarrow} HA_1\perp BC$ (1). Cum H este ortocentrul ΔABC rezultă că $AH\perp BC$ (2). Din (1) și (2) rezultă că A, H și A_1 sunt coliniare, deci $H\in AA_1$. **29.** *a)* $MB\perp(ABC), BA\perp AC$ și $BA, AC\subset(ABC)$ implică $MA\perp AC$; analog din $BD\perp MA, MA\perp AC, BA\perp AC, MA, AC\subset(MAC)\overset{R_2T_3\perp}{\Rightarrow} BD\perp(MAC)$;
b) $BD\perp(MAC)\Rightarrow BD\perp MC, MC\perp BE\Rightarrow MC\perp(BDE)$.

30. *a)* Conform $T_3\perp\Rightarrow MB\perp BC$. Conform $R_2T_3\perp\Rightarrow AP\perp(MBC)\Rightarrow AP\perp MC$.
Deci, $MC\perp AP, MC\perp AQ, AP, AQ\subset(APQ)\Rightarrow MC\perp PQ$ (1).
Analog $AR\perp(MDC)\Rightarrow MC\perp AR$, dar $MC\perp AQ, AQ, AR\subset(ARQ)\Rightarrow MC\perp RQ$ (2). Din (1) și (2) $\Rightarrow MC\perp(PRQ)$; *b)* $MC\perp(APQ)$, deci $(APQ)=(PQR)$, rezultă concluzia.

Scanned with OKEN Scanner

31. ***a)*** $A'M \perp AB', A'M \perp B'C', AB' \cap BC' = \{B\} \Rightarrow A'M \perp (AB'C')$. ***b)*** Se arată că $AP, D'M$ şi $B'N$ sunt înălţimi în $\Delta AB'D'$. **32.** Fie $C'M \perp AB$. Conform teoremei celor trei perpendiculare, $CM \perp AB \Rightarrow AB \perp (CC'M)$; dar $HH' \subset (CC'M) \Rightarrow AB \perp HH'$ (1). Fie $BN \perp AC'$. Atunci $BN \perp (ACC') \Rightarrow BN \perp AC$ (2). Fie $BP \perp AC$ (3), $P \in AC$. Din (2) şi (3) $\Rightarrow AC \perp (BNP)$. Dar $HH' \subset (BNP) \Rightarrow AC \perp HH'$ (4). Din (1) şi (4) $\Rightarrow HH' \perp (ABC)$.
33. ***a)*** Fie M mijlocul lui (BC). Cum $BC \perp MO_1$, $BC \perp MO_2 \Rightarrow BC \perp (MO_1O_2)$. Dar $BC \perp (d_1, O_1M)$ şi $BC \perp (d_2, O_2M)$. Rezultă că $(d_1, O_1M) = (d_2, O_2M) = (MO_1O_2) \Rightarrow d_1, d_2$ sunt coplanare. ***b)*** Dreptele d_1, d_2, d_3, d_4 sunt necoplanare trei câte trei şi concurente două câte două, deci sunt toate concurente în acelaşi punct. **34.** Triunghiurile CBB' şi $A'AC$ sunt congruente (C.C.), deci $A'C = B'C$. Fie M mijlocul segmentului $[A'B']$. Cum triunghiul $CB'A'$ este isoscel, rezultă că $A'B' \perp CM$. Dar $A'B' \perp OM$, deci $AB \perp (MOC)$. Cum $CH \perp AB$ şi $CH \perp AA'$, înseamnă că $CH \perp (AA'B)$, prin urmare $A'B' \perp CH$. Deoarece $A'B' \perp CM$, rezultă că $A'B' \perp (CMH)$. Ca urmare, planele (CMH) şi (CMO) coincid. Înseamnă că $HO \perp A'B'$. Analog se demonstrează că $HO \perp A'C'$, de unde rezultă concluzia.

Teste de evaluare

Testul 1. 1. ***a)*** $\text{pr}_{(ABC)}B' = B$; ***b)*** $\text{pr}_{(ABC)}[AB'] = [AB]$;
c) $m(\widehat{AB', (ABC)}) = m(\widehat{B'AB}) = 60^\circ$ deoarece $\sin(\widehat{B'AB}) = \frac{1}{2}$; ***d)*** Se aplică teorema catetei în $\Delta BAB'$; ***e)*** $2\sqrt{3}$ cm . **2.** ***a)*** Se foloseşte congruenţa triunghiurilor dreptunghice AOB, AOC şi AOD (cazul I.C.) ; ***b)*** O este centrul triunghiului echilateral BCD, deci O este şi ortocentru; ***c)*** $OB = 2\sqrt{3}$ cm ; ***d)*** $OA = 2\sqrt{6}$ cm .

Testul 2. 1. ***a)*** $BC \perp (ABB')$ şi $A'B \subset (ABB')$; ***b)*** $[AB]$; ***c)*** $m(\widehat{A'B, (ABC)}) = m(\widehat{A'BA})$ şi $\text{tg}(\widehat{A'BA}) = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow m(\widehat{A'BA}) = 30^\circ$; ***d)*** Se arată că $[A'O]$ este mediană în triunghiul isoscel $A'BD$; ***e)*** $d(A', BD) = A'O = 8\sqrt{7}$ cm . **2.** ***a)*** 2 cm ; ***b)*** 60° ; ***c)*** Fie M mijlocul lui $[BC]$ şi N piciorul perpendicularei din O pe SM. Se arată că $d(O, (SBC)) = ON$ şi $ON = \frac{\sqrt{3}}{2}$ cm ; ***d)*** $\text{pr}_{(SBC)}[SO] = [SN]$ şi $SN = \frac{3}{2}$ cm (se aplică teorema catetei în ΔSOM).

3.4. Unghi diedru. Plane perpendiculare

1. ***a)*** $AB \perp BC, AB \perp B'B, BC, B'B \subset (BCC'), AB \cap B'B \neq \emptyset \Rightarrow AB \perp (BCC')$;
b) $AB \perp (BCC'), AB \subset (ABC) \Rightarrow (ABC) \perp (BCC')$;
c) $AA' \perp AD, AA' \perp AB, AD \cap AB \neq \emptyset, AD, AB \subset (ABC) \Rightarrow AA' \perp (ABC)$;
d) $AA' \perp (ABC), AA' \subset (ACC') \Rightarrow (ACC') \perp (ABC)$.

2. ***a)*** $AA' \perp (ABC), AA' \perp AB, AB \perp BC, AB, BC \subset (ABC) \overset{T_3\perp}{\Rightarrow} A'B \perp BC$;
b) $(A'BC) \cap (ABC) = BC, A'B \perp BC, A'B \subset (A'BC), AB \perp BC, AB \subset (ABC) \Rightarrow$
$m(\sphericalangle((A'BC);(ABC))) = m(\sphericalangle A'B; AB) = m(\sphericalangle A'BA)$; ***c)*** 45° . **3.** ***a)*** $ABCDA'B'C'D'$ cub $\Rightarrow BCC'B'$ pătrat $BC' \perp B'C$; ***b)*** $BC' \perp B'C, B'C \perp AB \Rightarrow B'C \perp (ABC')$;

Scanned with OKEN Scanner

c) $B'C \perp (ABC'), B'C \subset (A'B'C) \Rightarrow (A'B'C) \perp (ABC')$. **4.** *a)* Conform $T_3 \perp \Rightarrow$ $A'B \perp BC$; *b)* $m(\sphericalangle((A'BC);(ABC)) = m(\sphericalangle A'BA) = 30^\circ$; *c)* Din $T_3 \perp \Rightarrow A'D \perp DC$; *d)* 60°. **5.** *a)* Din $T_3 \perp \Rightarrow A'B \perp BC$; *b)* 30°. **6.** *a)* 60°; *b)* $6\ cm$; *c)* 30°. **7.** *a)* $12\ cm$; *b)* $48\sqrt{6}\ cm^2$. **8.** *a)* Din $T_3 \perp \Rightarrow VM \perp AB$; *b)* *c)* 60°. **9.** *a)* $2\ cm$; *b)* 45°. **10.** *a)* $VO = 2\sqrt{3}\ cm$; *b)* $\sqrt{3}\ cm$; *c)* $\frac{\sqrt{3}}{3}$. **11.** *a)* $A_{ABC} = 6\ cm^2$; *b)* $3\ cm^2$; $3\sqrt{3}\ cm^2$; $3\sqrt{2}\ cm^2$. **12.** *a)* $AB \parallel \alpha$, $m(\sphericalangle ABC) = 90^\circ \Rightarrow m(\sphericalangle A'B'C') = 90^\circ \Rightarrow A_{A'B'C'} = 27\ cm^2$; *b)* $\cos u = \frac{1}{2}$. **13.** *a)* $A_{ABC} = 6\ cm^2$; *b)* $\cos u = \frac{2\sqrt{3}}{3}$. **14.** *a)* $126\ cm^2$; *b)* 60°. **15.** *a)* $(DNM) \cap (AMN) = MN$; $AN \perp MN$, $AN \subset (AMN) \Rightarrow m(\sphericalangle((DMN);(AMN)) = m(\sphericalangle AN;DN) = m(\sphericalangle DNA)$; *b)* 30°; *c)* 120°. **16.** *a)* $8\sqrt{3}\ cm$; *b)* $8\ cm$; *c)* $8\sqrt{3}\ cm$. **17.** *a)* $AF \perp AB, AF \perp AD$, $AB, AD \subset (BCD)$, $AB \cap AD \neq \emptyset \Rightarrow AF \perp (BCD)$; *b)* $EF \parallel AF, AF \perp (BCD) \Rightarrow EB \perp (BCD), BM \perp AC$, $BM, AC \subset (BCD) \overset{T_3 \perp}{\Rightarrow} EM \perp AC \Rightarrow d(E,AC) = EM = 4\sqrt{34}\ cm$; *c)* $50\sqrt{34}\ cm^2$; *d)* $\frac{3\sqrt{34}}{34}$; *e)* $\frac{3}{5}$. **18.** *a)* $(ADC) \perp (ABC)$, $(ADC) \cap (ABC) = AC$, $DM \subset (ADC) \Rightarrow DM \perp (ABC)$; *b)* *i)* 12 cm; *ii)* 60^0. **19.** *a)* $(ABD) \cap (BCD) = BD$, $CO \perp BD, CO \subset (BCD) \overset{T3\perp}{\Rightarrow} CO \perp (ABD)$; *b)* $\frac{3\sqrt{34}}{34}$. **20.** *a)* 10 cm; *b)* 60^0; *c)* $\sin(\widehat{(ADB),(CDB)}) = \frac{2\sqrt{2}}{3}$. **21.** *a)* $\frac{72}{5}$ cm; *b)* $\frac{2\sqrt{1883}}{5}$ cm. **22.** *a)* 60^0; *b)* $\frac{\sqrt{3}}{3}$; *c)* $\frac{\sqrt{3}}{3}$. **23.** *a)* F; *b)* F; *c)* A; *d)* F; *e)* A; *f)* A. **24.** 45^0. **25.** *a)* $m(\widehat{(VBC),(ABC)}) = 60^0$; *b)* $m(\widehat{(VBC),(VAD)}) = 60^0$. **26.** *a)* $\frac{2\sqrt{2}}{3}$; *b)* 90^0; *c)* $\frac{2\sqrt{2}}{3}$; *d)* $\frac{5\sqrt{6}}{3}$; *e)* $25\ cm^2$. **27.** *a)* $5\sqrt{7}$ cm; *b)* $\cos(\widehat{(SBC),(ABC)}) = \frac{12}{\sqrt{319}}$. **28.** 45^0. **29.** 75^0.

3.5. Calculul unor distanţe şi măsuri de unghiuri pe feţele sau în interiorul corpurilor studiate

1. 26 cm. **2.** *a)* $\frac{\sqrt{2451}}{5}$ cm; *b)* 30°. **3.** *a)* 9 cm; *b)* $\sqrt{481}$ cm; *c)* $\frac{40}{\sqrt{481}}$. **4.** *a)* 10 cm *b)* 10 cm; *c)* $\frac{\sqrt{2}}{2}$ cm. **5.** *a)* $5\sqrt{2}$ cm; *b)* $\frac{8\sqrt{2}}{5}$ cm. **6.** 30°. **7.** *a)* 15 cm; *b)* $\frac{3}{4}$; *c)* 180 cm; **8.** *a)* $32\sqrt{3}\ cm^2$; *b)* $30°$; *c)* $4\sqrt{3}$ cm. **9.** *a)* $2\sqrt{89}$ cm; *b)* $2\sqrt{61}$ cm; *c)* $\frac{2\sqrt{1201}}{5}$ cm; *d)* 10 cm; *e)* $10\sqrt{2}$ cm; *f)* $\frac{60\sqrt{61}}{61}$ cm. **10.** $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ cm. **11.** *a)* $8\sqrt{2}$ cm; *b)* $32\sqrt{3}\ cm^2$. **12.** $33+\sqrt{281}$ cm. **13.** *a)* $\frac{BM}{MC'} = \frac{\sqrt{2}}{2}$; *b)* $AM = MN = NC' = 3\sqrt{3}$ cm.

Scanned with OKEN Scanner

14. *a)* $d(C',AB)=C'B=8\sqrt{2}$ cm ; *b)* $d(C,(C'BD))=4\sqrt{2}$ cm ; *c)* $\sin\left(\widehat{AB'D}\right)=\frac{\sqrt{3}}{3}$. **15.** *a)* $6\sqrt{7}$ cm ; *b)* $144\sqrt{3}$ cm^2. **16.** $d(AC,BD')=\frac{12\sqrt{17}}{17}$ cm. **17.** $8\sqrt{3}$ cm. **18.** *a)* 5 cm ; *b)* $\sqrt{7}$ cm ; *c)* $9\sqrt{14}$ cm. **19.** *a)* 10 cm ; *b)* $\frac{54\sqrt{34}}{17}$ cm ; *c)* $AC \not\perp A'C'$. **20.** *a)* $2\sqrt{13}$ cm ; *b)* $2\sqrt{39}$ cm. **21.** 7 cm. **22.** *a)* 10 cm ; *b)* fie $E=\text{pr}_{VB}C, \Delta CBE \equiv \Delta ABE \Rightarrow E=\text{pr}_{VB}A$; *c)* $\frac{24}{25}$. **23.** *a)* $\frac{60\sqrt{37}}{37}$ cm ; *b)* $\frac{120\sqrt{37}}{37}$ cm. **24.** *a)* $2\sqrt{6}$ cm ; *b)* $\frac{2\sqrt{6}}{3}$ cm ; *c)* $3\sqrt{2}$ cm. **25.** *a)* 14 cm ; *b)* $7\sqrt{6}$ cm ; *c)* $\frac{35\sqrt{102}}{102}$. **26.** *a)* Fie $(AD')\cap(A'D)=\{O\}$. Avem $A'D\perp AD'$, $A'D\perp D'C' \Rightarrow A'D\perp(AD'C')$. Fie $OP\perp AC'$ (1), $OP\subset(AD'C') \Rightarrow OP\perp AD'$ (2). Din (1) şi (2) $\Rightarrow d(A'D,AC')=OP$. $\Delta AOP\sim\Delta AC'D' \Rightarrow OP=\frac{a\sqrt{6}}{6}$; *b)* $(ABC')\cap(ACC')=AC'$, $OP\perp AC'$, $A'P\perp AC' \Rightarrow((\widehat{ABC'}),(\widehat{ACC'}))=\widehat{OPA'}$ $\Delta OPA'$ este drept. în O $\Rightarrow \sin(\widehat{OPA'})=\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow m(\widehat{OPA'})=60^0$. **27.** *a)* $2\sqrt{17}$ cm ; *b)* $2\sqrt{15}$ cm ; *c)* $\frac{1}{4}$. **28.** *a)* 45^0 ; *b)* $\frac{5\sqrt{2}}{2}$ cm ; *c)* $5\sqrt{2}$ cm. **29.** *a)* $\sqrt{91}$ cm ; *b)* $\frac{20\sqrt{3}}{\sqrt{91}}$ cm. **30.** *a)* $\sqrt{219}$ cm ; *b)* $\frac{30}{\sqrt{73}}$ cm ; *c)* $\frac{30}{61}$. **31.** *a)* 3 cm ; *b)* $\frac{3\sqrt{2}}{8}$. **32.** $\frac{24\sqrt{73}}{73}$ cm. **33.** *a)* $4\sqrt{5}$ cm ; *b)* 2 ; *c)* $\frac{4}{5}$. **34.** $\frac{40}{3}$ cm. **35.** *a)* 10 cm ; *b)* $5\sqrt{6}$ cm ; *c)* $5\sqrt{7}$ cm. **36.** *a)* 60^0 ; *b)* **i)** $6\sqrt{2}$ cm ; **ii)** $\frac{12\sqrt{26}}{13}$ cm ; *c)* $3\sqrt{2}$ cm. **37.** *a)* 45^0 ; *b)* $\frac{2\sqrt{2}}{3}$. **38.** Fie M mijlocul muchiei $[BC]$. Cum $BC\parallel B'C'\subset(AB'C')$, rezultă că $d(B,(AB'C'))=d(M,(AB'C'))$. Dacă M' este mijlocul muchiei $[B'C']$ şi $MP\perp AM'$, $P\in AM'$, atunci $MP\perp(AB'C')$. $AM=3\sqrt{3}$ cm şi $AM'=3\sqrt{6}$ cm. Atunci $d(M,(ABC))=MP=\frac{3\sqrt{6}}{2}$ cm. Patrulaterul $AMM'A'$ este pătrat deci $MA'\perp AM'$. Avem $MA'\perp BC\parallel B'C'$. Rezultă că $MA'\perp(AB'C')$. Dar $MA'\subset(A'BC)$, deci $(A'BC)\perp(AB'C')$. **39.** Planele $(A'BD)$ şi $(C'BD)$ sunt egal înclinate în raport cu planul (ABC), deci $m(\sphericalangle(C'BD);(ABC))=45^\circ$. Fie $P\in(BD)$ astfel încât $C'P\perp BD$, rezultă că $m(\sphericalangle(C'BD);(ABC))=m(\sphericalangle CPC')=45^\circ$. Planele $(AB'D')$ şi $(C'BD)$ sunt paralele şi determină pe diagonala $[A'C]$ segmente congruente având lungimea egală cu $\frac{1}{3}\cdot A'C$ Deducem că distanţa dintre planele $(AB'D')$ şi $(C'BD)$ este egală cu $d(C;(C'BD))$

Scanned with OKEN Scanner

$d\left(C;(C'BD)\right)=d\left(C;C'P\right)=12\sqrt{2}$ cm. Deducem că $CC'=CP=\frac{CB\cdot CD}{BD}=24$ cm.

Teste de evaluare

Testul 1. **1.** ***a)*** $AB'=6\sqrt{2}$ cm ; ***b)*** $AC'=6\sqrt{3}$ cm ; ***c)*** Se arată că dreapta $B'C$ este perpendiculară pe planul (ABC') (deoarece $B'C\perp BC'$ şi $AB\perp B'C$) şi este inclusă în planul $(A'B'C)$; ***d)*** 45° ; ***e)*** $m(\widehat{(A'BD),(ABD)})=m(\widehat{A'OA})$ şi $\cos(\widehat{A'OA})=\frac{\sqrt{3}}{3}$. **2.** ***a)*** $\sqrt{3}$ cm ; ***b)*** $m(\widehat{(SBC),(ABC)})=m(\widehat{SMO})$, . unde M este mijlocul laturii $[BC]$; $SO=OM\Rightarrow m(\widehat{SMO})=45^\circ$; ***c)*** Fie $ON\perp SM$, $N\in(SM)$. Se arată că $d(O,SBC)=ON$ şi $ON=\frac{\sqrt{6}}{2}$ cm ; ***d)*** Dacă $A'=\text{pr}_{SM}A$, folosind teorema fundamentală a asemănării în $\Delta AA'M$ obţinem $d(A,(SBC))=AA'=3\cdot ON=\frac{3\sqrt{6}}{2}$.

Testul 2. **1.** ***a)*** $AB'=16$ cm ; ***b)*** Se arată că dreapta BD este perpendiculară pe (ACC') şi este inclusă în planul (BDD') ; ***c)*** $AB\perp(BB'C)$ şi $C'B\subset(BB'C)$; ***d)*** $m(\widehat{(ABC'),(ABC)})=m(\widehat{C'BC})$ şi $\text{tg}(\widehat{C'BC})=\frac{\sqrt{3}}{3}\Rightarrow m(\widehat{C'BC})=30^\circ$; ***e)*** Fie M piciorul perpendicularei din C pe BC' . Se arată că $CM\perp(ABC')$, deci $d(C,(ABC'))=CM$. În $\Delta CBC'$: $CM=\frac{BC\cdot CC'}{BC'}=4\sqrt{3}$ cm . **2.** ***a)*** $m(\widehat{SC,(ABC)})=m(\widehat{SCO})=45^\circ$; ***b)*** Se arată că ΔSAC este dreptunghic în S, aşadar $d(A,SC)=AS=8$ cm ; ***c)*** În triunghiurile isoscele QDB şi PDB avem $QO\perp BD$ şi $PO\perp BD$, deci $m(\widehat{(QDB),(PDB)})=m(\widehat{QOP})$. Apoi observăm că $OQ\perp OP$ (deoarece $OQ\parallel SC$ şi $OP\parallel AS$) ; ***d)*** Fie $QE\perp SO$, $E\in(SO)$. Atunci $\text{pr}_{(SBD)}\Delta QBD=\Delta EDB$ şi $\mathcal{A}_{EDB}=16\text{ cm}^2$.

3.6. Probleme cu caracter aplicativ

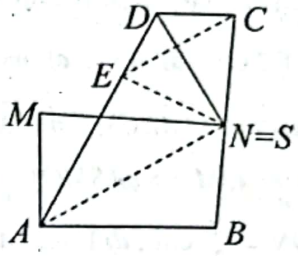
1. ***a)*** $\text{tg}\left(\widehat{AM,OO'}\right)=\text{tg}\left(\widehat{NOO'}\right)=\frac{2\sqrt{2}}{6}=\frac{\sqrt{2}}{3}$; ***b)*** Fie $OT\perp BO'\ T\in\left(BO'\right)$. Conform teoremei celor 3 perpendiculare avem $d\left(M,BO'\right)=MT$. Obţinem $OT=2\sqrt{3}$ cm şi $MT=2\sqrt{11}$ cm; ***c)*** Fie S mijlocul segmentului $[BC]$ şi $OP\perp SO'$, $P\in\left(SO'\right)$. Obţinem $d\left(O,(BCO'\right)=OP=\frac{3\sqrt{6}}{2}$ cm. **2.** ***a)*** $AP\perp BC$, $P\in(BC)\Rightarrow d\left(A;(BCE)\right)=AP=\sqrt{3}$ cm; ***b)*** $A_{\text{pânză}}=18+2\sqrt{3}<22$; ***c)*** Fie $PM\perp EF,M\in\left(EF\right)$. Conform teoremei celor trei perpendiculare avem $d\left(M,EF\right)=AM=2\sqrt{3}$ cm. **3.** ***a)*** $4\sqrt{3}$ cm; ***b)*** $\frac{\sqrt{3}}{3}$; ***c)*** $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **4.** ***a)*** $A_{VBC}=540$ m^2, deci suma primită de alpinist este de $540\cdot 2=1080$ euro; ***b)*** $l_{\text{panglică}}=\frac{180\sqrt{34}}{17}$ m; ***c)*** Dacă $VM=AM=x\Rightarrow OM=24-x\Rightarrow x=25{,}5\text{ m}>24$ m, deci nu se poate. **5.** ***a)*** $MO'=\sqrt{509}<\sqrt{510{,}76}=22{,}6$; ***b)*** $AA'=7$ m; ***c)*** $MO=10\sqrt{5}$ m; ***d)*** $d\left(M,(BCC')\right)=22$ m; ***e)*** $d\left(A,(NPP')\right)=\frac{168\sqrt{193}}{193}$ m. **6.** ***a)***

Scanned with OKEN Scanner

$AB = 12$ dm $\Rightarrow A_{\text{pânză}} = 108\sqrt{3} \cong 187$ dm; ***b)*** Cu teorema lui Pitagora în triunghiul POB se obține $VP = 3\sqrt{6}$ dm; ***c)*** $d(S;VC) = 6\sqrt{2}$ dm.

3.7. Probleme pentru performanţă şcolară şi olimpiade

3. ***a)*** 8 cm; ***b)*** $4\sqrt{6}/3$. **13.** ***a)*** $d(M, BC) = 24$; ***b)*** $d(A, (MBC)) = 6\sqrt{3}$; ***c)*** $m(\widehat{(MBC);(ABC)}) = 60°$. **14.** Fie $E \in [AD]$ astfel încât $AE = AB$ şi bisectoarea $[AS$ a unghiului DAB, $S \in BC \Rightarrow \Delta EAS \equiv \Delta BAS$ (LUL) $\Rightarrow$



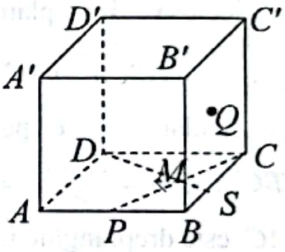
$\Rightarrow BS = ES \Rightarrow \hat{B} \equiv \widehat{AES} \Rightarrow \widehat{SED} \equiv \widehat{SCD}$ (1)

$m(\widehat{DEC}) = \dfrac{180° - m(\hat{D})}{2} = \dfrac{m(\hat{A})}{2} \Rightarrow EC \parallel AS.$

Din $DE = DC \Rightarrow \widehat{DCE} \equiv \widehat{DEC}$ (2) şi cu (1) $\Rightarrow$

$\Rightarrow \widehat{CES} \equiv \widehat{CSE} \Rightarrow CS = ES$ dar $SB = ES \Rightarrow SB = SC \Rightarrow S \equiv N$. $\Delta DEN \equiv \Delta DCN$ (LUL) $\Rightarrow [DN$ este bisectoarea unghiului $EDC \Rightarrow DN \perp EC$ şi cum $EC \parallel AN \Rightarrow AN \perp DN$. Din $MA \perp (ABC)$, $AN \perp DN$, $DN \subset (ABC) \overset{T.3\perp}{\Rightarrow} MN \perp ND$.

15. În pătratul $ABCD$ notăm $\{M\} = DS \cap CP$. Avem $\widehat{DCM}$ este complementul unghiului $\widehat{PCB}$ şi a lui $\widehat{MDC} \Rightarrow$



$\widehat{PCB} \equiv \widehat{SDC} \Rightarrow \Delta PCB \equiv \Delta SDC$ (C.U.) $\Rightarrow PB = CS \Rightarrow$

$\Rightarrow S$ este mijlocul lui $[BC] \Rightarrow QS \parallel DD'$. Din $PC \perp DS$ şi $PC \perp DD' \Rightarrow PC \subset (D'DM) \Rightarrow MQ \subset (D'DM) \Rightarrow PC \perp MQ$.

16. ***a)*** 45°; ***b)*** 90° ($MC \perp BD$).

17. ***a)*** $[MO]$ este linie mijlocie în $\Delta DVB \Rightarrow MO \parallel VB$ dar $VB \subset (VBC) \Rightarrow MO \parallel (VBC)$; ***b)*** $OC = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$, $DC = a \Rightarrow \Rightarrow DO = \dfrac{a}{2} \Rightarrow DB = a \Rightarrow \Delta BCD$ echilateral $\Rightarrow BN \perp DC$.

$VD \perp (ABC) \supset BN \Rightarrow BN \perp VD$ şi $BN \perp DC \Rightarrow BN \perp (VDC)$. ***c)*** $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$. **18.** 6 cm.

19. $m(\sphericalangle C) = 2m(\sphericalangle B)$ şi $m(\sphericalangle B) + m(\sphericalangle C) = 180°$ implică $m(\sphericalangle B) = 60°$ şi $m(\widehat{BCD}) = 120°$ $\Rightarrow m(\widehat{MCB}) = 60° \Rightarrow \Delta MBD$ este echilateral cu $BC = k \Rightarrow AB = 2k \Rightarrow \mathcal{P}_{ABC} = 6k$. Notăm $\{S\} = AD \cap CM$; atunci ΔSDC este echilateral cu $DC = 2k$ în care AC şi MD sunt mediane $\Rightarrow P$ este centrul de greutate $\Rightarrow \dfrac{MP}{PD} = \dfrac{1}{2}$ iar $AC = \dfrac{DC\sqrt{3}}{2} \Rightarrow AC = MD = k\sqrt{3} \Rightarrow AC + MD = 2\sqrt{3}\,k > 3k$. **23.** 30°.

Scanned with OKEN Scanner

Ediţiile completate şi revizuite ale lucrărilor pentru gimnaziu din **Clubul matematicienilor**:

– corespund integral *programei şcolare în vigoare*;

– oferă o *sinteză completă*, structurată, cu exemple, *a teoriei*, care, în contextul frecventelor schimbări de programă şcolară, va reprezenta un sprijin consistent, atât pentru elevi, cât şi pentru profesori, în completarea (sau chiar înlocuirea) manualului şcolar;

– propun elevilor *mai multe aplicaţii* decât majoritatea lucrărilor existente pe piaţă; în plus, exerciţiile sunt foarte variate, fiind grupate pe trei niveluri de dificultate (marcate grafic cu una, două, respectiv trei steluţe); pentru elevii orientaţi spre performanţă, există provocarea „problemelor de şapte stele";

– oferă *soluţii cu explicaţii detaliate* acolo unde apare pentru prima dată un nou tip de problemă, pentru a permite elevilor să înţeleagă mai uşor rezolvarea acesteia;

– cuprind *Fişe de evaluare concepute special pentru portofoliul individual* al elevilor, probe care pot fi detaşate şi păstrate pentru a ilustra parcursul de învăţare al acestora;

– conţin, de asemenea, capitole speciale cu exerciţii şi probleme având un pronunţat *caracter aplicativ* (utilizate recent în noul tip de evaluare), cu modele de *subiecte pentru teză*, precum şi cu *subiecte pentru concursurile şi olimpiadele şcolare*.

I

ISBN 978-973-124-746-5

Scanned with OKEN Scanner